Робастные методы ускорения сходимости со сложным поведением

Д. В. Парфенов*, Р. Г. Крейнин‡

Рассматривается задача ускорения сходимости числовых последовательностей и рядов при сложном поведении остатка: смене знака, наличии нескольких асимптотических компонент, постепенном снижении точности вычислений. Проводится сравнительный анализ классических и новых нелинейных преобразований (преобразования Левина и их варианты t, u и v, преобразования Левина–Сиди, преобразование Сиди $d^{(m)}$, pJ-преобразование Хомайера, W-преобразование Лубкина, ε-алгоритм Винна, θ-алгоритм Брезински и др.) на широком наборе тестовых последовательностей с точно известным пределом. Вычисления выполняются с регулируемой точностью до 100 значащих десятичных цифр. Показано, что ни одно преобразование не является универсально лучшим; по результатам экспериментов выделены два набора взаимодополняющих методов: быстрый, включающий алгоритм Драммонда, Сиди $d^{(m)}$, ε-алгоритм Винна и высокоточный, включающий θ-алгоритм Брезински, Сиди $d^{(m)}$ и ε-алгоритм Винна. Среди рассмотренных тестовых последовательностей обнаружен особый класс последовательностей с притягивающими и отталкивающими точками, требующий дальнейшего исследования.

Ключевые слова: числовые ряды, ускорение сходимости, преобразование Левина, преобразование Левина–Сиди, pJ-преобразование Хомайера, θ-алгоритм Брезински, арифметика конечной точности, интервальная арифметика.

Ускорение сходимости числовых последовательностей и рядов остаётся актуальной задачей вычислительной математики как в теоретическом, так и в практическом отношении. Даже при существовании соответствующего предела его оценка может требовать вычисления неприемлемо большого числа членов, а поведение частичных сумм нередко осложняется сменой

Парфенов Денис Васильевич — канд. техн. наук, доцент, МИРЭА — Российский технологический университет, г. Москва, e-mail: promasterden@yandex.ru.

Parfenov Denis Vasilyevich — Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, MIREA — Russian Technological University, Moscow.

‡*Крейнин Роман Геннадьевич* — студент магистратуры, МИРЭА — Российский технологический университет, г. Москва, e-mail: kreynin.rg@mail.ru, ORCID: 0009-0001-1466-3038.

Kreinin Roman Gennadievich — Master's student, MIREA — Russian Technological University, Moscow.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

знака, несколькими асимптотическими компонентами или значительным постепенным снижением точности при вычислениях.

Пусть числовая последовательность $S_n \to S$, то есть

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N(\varepsilon) \; \forall n \geq N(\varepsilon) : \quad |S_n - S| < \varepsilon. \tag{1}$$

По исходным членам строится преобразованное приближение $A_{n,k} = \mathcal{T}_{n,k}(S_0, \ldots, S_{m-1})$, где k — порядок преобразования, а m — число фактически использованных исходных членов. Классическое условие ускорения при сохранении предела имеет вид

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A_{n,k} - S}{S_n - S} = 0, \tag{2}$$

если отношение определено для достаточно больших n (фиксированное k) [2, 4]. Для иллюстрации идеи нелинейного ускорения можно рассмотреть преобразование Эйткена:

$$A_n = S_n - \frac{(\Delta S_n)^2}{\Delta^2 S_n}, \quad \Delta S_n = S_{n+1} - S_n, \quad \Delta^2 S_n = \Delta S_{n+1} - \Delta S_n. \tag{3}$$

В работе рассматриваются наиболее перспективные как новые, так и классические преобразования: Левина [1] и их варианты t, u и v, преобразования Левина–Сиди [2], преобразование Сиди $d^{(m)}$ [2], pJ-преобразование Хомайера, W-преобразование Лубкина, ε-алгоритм Винна [3], θ-алгоритм Брезински [4] и другие. Эти методы опираются на разные модели остатка, по-разному используют информацию о членах последовательности и моделируют их динамику, поэтому их эффективность может существенно различаться в зависимости от класса тестовой задачи.

Для тестов берутся $S_n = S + r_n$ с известным S; в табл. 1 указаны основные модели ускоряемых последовательностей ($p, q > 0$, $\beta > 1$, $|\lambda_j| < 1$).

Для каждого из семи классов рассматривались десять последовательностей с различными параметрами. Вычисления проводились в арифметике двойной точности и с регулируемой точностью до 100 значащих десятичных цифр при одинаковом бюджете $N = 100$ исходных членов.

Для алгоритма $\mathcal{T}$, вернувшего результат A_n, последовательность теста j считалась успешно ускоренной $I_{\mathcal{T}}(j) = 1$, если метод уменьшал абсолютную ошибку в десятичных порядках по отношению к исходной последовательности:

$$I_{\mathcal{T}}(j) = [G_j(\mathcal{T}) > 0], \quad G_j(\mathcal{T}) = \log_{10} \frac{|S^{(j)}_{m_j-1} - S^{(j)}|}{|A^*_{\mathcal{T},j} - S^{(j)}|}, \tag{4}$$

Таблица 1: Классы тестовых последовательностей

Класс	Остаток r_n	Методы
1. Степенная, медленная	$a(n+\beta)^{-p}$ (малое p)	ЧВ, С
2. Логарифмическая	$a[\ln(n+\beta)]^{-p}$	ЛС, Д
3. Знакопеременная	$a(-1)^n(n+\beta)^{-p}$	Лб, Б
4. Осциллирующая	$a\sin(\omega n+\varphi)(n+\beta)^{-p}$	С, Ср
5. Сумма экспонент	$\sum_{j=1}^{r} a_j\lambda_j^n$	Эп, С
6. Смешанная	$a(n+\beta)^{-p}+b(-1)^n(n+\beta)^{-q}$	С, Ср
7. Нерегулярная	$\eta_n(n+\beta)^{-p}$, $\lvert\eta_n\rvert\le 1$	Ср, С

ЛС — Левин–Сиди m; Д — Драммонд; Лб — Лубкин W; Б — Брезински θ; Эп — ε-алгоритм Винна; С — Сиди $d^{(m)}$; Ср — вариант преобразования Сиди $d^{(m)}$ с параметром шага; ЧВ — Чанг–Винн. В последнем столбце приведены методы, показавшие наибольший выигрыш в точности на соответствующих классах при 100 значащих десятичных цифрах (см. $M_c(\mathcal{T})$ в (5)).

где $A^*_{\mathcal{T},j}$ — приближение с наименьшей ошибкой на траектории метода, m_j — число использованных для него исходных членов.

Нулевые и численно опасные знаменатели фиксировались как срывы преобразования; построение траектории прекращалось, а при оценке точности учитывались все корректные приближения, полученные до срыва.

Робастным называем метод, который успешно выполняет ускорение сходимости $G_j(\mathcal{T}) > 0$ для различных классов, параметров тестов и точности вычислений при отсутствии или минимальном количестве срывов.

Точность метода $\mathcal{T}$ оценивалась по медиане внутриклассовых медиан выигрыша $M(\mathcal{T})$:

$$M_c(\mathcal{T}) = \operatorname{med}_{j\in J_c} G_j(\mathcal{T}), \quad M(\mathcal{T}) = \operatorname{med}_{c=1,\dots,7} M_c(\mathcal{T}), \tag{5}$$

где J_c — множество индексов тестовых последовательностей класса c, $M_c(\mathcal{T})$ — медианный выигрыш метода внутри класса.

Скорость достижения наилучшей точности оценивалась по числу использованных исходных членов m, соответствующему приближению с минимальной абсолютной ошибкой. Итоговый показатель $N(\mathcal{T})$ определялся как медиана внутриклассовых медиан этих значений: $N(\mathcal{T}) = \operatorname{med}_{c=1,\dots,7}\left(\operatorname{med}_{j\in J_c} m_j^*\right)$, где m_j^* соответствует наилучшему приближению для последовательности j. Меньшее значение означает более быстрое достижение наилучшей точности.

Сопоставление проводилось отдельно для арифметики двойной точности и для 100 значащих десятичных цифр. Результаты для 100-значных вычислений приведены в табл. 2.

Таблица 2: Результаты сравнения преобразований на 70 последовательностях

Преобразование	I	Мед. выигрыш M	Число членов N
Сиди $d^{(m)}$	68	17,968	95
Винна ε	67	7,036	100
Брезински θ	66	7,257	100
Драммонд	66	1,947	100

Эксперименты не выявили единого лидирующего преобразования, одинаково эффективного на всех рассмотренных классах. Тем не менее в проведённых испытаниях были выделены два набора взаимодополняющих методов: *быстрый* — включающий алгоритм Драммонда, Сиди $d^{(m)}$, ε-алгоритм Винна; *высокоточный* — θ-алгоритм Брезински, Сиди $d^{(m)}$ и ε-алгоритм Винна. Эти наборы обеспечили ускорение на каждом из семи рассмотренных классов, различаясь глубиной ускорения и числом использованных членов исходных последовательностей.

Среди рассмотренных тестовых последовательностей был обнаружен особый класс последовательностей с притягивающими и отталкивающими точками, характеризующийся сложным поведением в арифметике конечной точности. Это требует как аналитического, так и экспериментального дополнительного исследования с использованием интервальной арифметики, вычислений с адаптивной повышенной точностью и совместным анализом как динамики остатков, так и численной устойчивости.

Список литературы

[1] D. Levin, “Development of non-linear transformations for improving convergence of sequences”, *Int. J. Comput. Math.*, **3** (1972), 371–388. DOI: 10.1080/00207167308803075.

[2] A. Sidi, *Practical Extrapolation Methods: Theory and Applications*, Cambridge University Press, Cambridge, 2003. DOI: 10.1017/CBO9780511546815.

[3] P. Wynn, “On a device for computing the $e_m(S_n)$ transformation”, *Math. Tables Other Aids Comput.*, **10** (1956), 91–96. DOI: 10.2307/2002183.

[4] C. Brezinski, M. Redivo-Zaglia, *Extrapolation Methods: Theory and Practice*, North-Holland, Amsterdam, 1991.

Статья поступила 20 октября 2026 г.

Robust methods for accelerating convergence with complex behavior

D. V. Parfenov, R. G. Kreinin

The problem of accelerating the convergence of numerical sequences and series under complex behavior of the remainder is considered: sign changes, multiple asymptotic components, gradual loss of computational accuracy. A comparative analysis of classical and new nonlinear transformations (Levin's transformations and their t, u, v variants, Levin–Sidi transformations, Sidi's $d^{(m)}$-transformation, Homeier's pJ-transformation, Lubkin's W-transformation, Wynn's ε-algorithm, Brezinski's θ-algorithm, etc.) is carried out on a wide set of test sequences with exactly known limits. Computations are performed with adjustable precision up to 100 significant decimal digits. It is shown that no single transformation is universally the best; based on the experimental results, two complementary sets are identified: a fast set comprising Drummond's transformation, Sidi's $d^{(m)}$-transformation, and Wynn's ε-algorithm, and a high-accuracy set comprising Brezinski's θ-algorithm, Sidi's $d^{(m)}$-transformation, and Wynn's ε-algorithm. A special class of sequences with attracting and repelling points is identified among the test sequences, requiring further investigation.

Keywords: numerical series, convergence acceleration, Levin's transformation, Levin–Sidi transformation, Homeier's pJ-transformation, Brezinski's θ-algorithm, finite-precision arithmetic, interval arithmetic.

References

[1] D. Levin, "Development of non-linear transformations for improving convergence of sequences", *Int. J. Comput. Math.*, **3** (1972), 371–388. DOI: 10.1080/00207167308803075.

[2] A. Sidi, *Practical Extrapolation Methods: Theory and Applications*, Cambridge University Press, Cambridge, 2003. DOI: 10.1017/CBO9780511546815.

[3] P. Wynn, "On a device for computing the $e_m(S_n)$ transformation", *Math. Tables Other Aids Comput.*, **10** (1956), 91–96. DOI: 10.2307/2002183.

[4] C. Brezinski, M. Redivo-Zaglia, *Extrapolation Methods: Theory and Applications*, North-Holland, Amsterdam, 1991.

Received on October 20, 2026