Метод классификации изображений открытых и закрытых глаз на основе выпуклой линейной оболочки над конечным полем

Е. С. Ковалёва*

Предлагается метод классификации открытых и закрытых глаз, основанный на построении выпуклых линейных оболочек конечных множеств точек над полем $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$. Гранью называется гиперплоскость, содержащая не менее n точек исходного множества, на остальных точках которого соответствующая линейная форма принимает одно и то же ненулевое значение $\lambda_a \in \{1, 2\}$. Принадлежность точки выпуклой линейной оболочке определяется условиями $L_a(x) \in \{0, \lambda_a\}$ для всех её граней.

Ключевые слова: выпуклая линейная оболочка, конечные поля, пространство E_3^n, линейные формы, распознавание образов, классификация изображений.

1. Введение

В работе предложен метод распознавания образов, основанный на построении выпуклых линейных оболочек конечных множеств точек над полем из трёх элементов. Разработан алгоритм построения оболочек и проверки принадлежности им новых точек. Метод применён к распознаванию открытых и закрытых глаз по цифровым изображениям. Точность классификации составила 97.92% и 96.05% соответственно. Рассмотренная прикладная задача является частным случаем применения метода, который также может использоваться для классификации объектов, представленных конечными наборами дискретных признаков.

2. Основные определения

Введём основные определения выпуклой линейной оболочки над конечным полем, предложенные в работе [1].

* *Ковалёва Елена Сергеевна* — аспирант каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: e.kovaleva.msu@yandex.ru, ORCID: 0009-0004-7275-3076.

Kovaleva Elena Sergeevna — PhD student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intellectual Systems.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

Пусть $E_3 = \mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$ является конечным полем из трёх элементов, а E_3^n — n-мерным линейным пространством над полем E_3.

Определение 1. *Гиперплоскостью в пространстве* E_3^n называется афинная линейная форма $L_a(x) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + a_{n+1}$, где $a = (a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}) \in E_3^{n+1}$ и $(a_1, \ldots, a_n) \neq (0, \ldots, 0)$, для которой выполняется уравнение $L_a(x) \equiv 0 \pmod 3$. Обозначим через $S_a = \{x = (x_1, ..., x_n) \in E_3^n \mid L_a(x) \equiv 0 \pmod 3\}$ множество точек, принадлежащих гиперплоскости $L_a(x)$.

Определение 2. Пусть $X \subset E_3^n$ — конечное множество точек, $L_a(x)$ — гиперплоскость в пространстве E_3^n, $X \setminus S_a = \{x \in X \mid x \notin S_a\}$. $L_a(x)$ называется *гранью выпуклой линейной оболочки* множества X, если выполняются следующие условия:

1. S_a содержит не менее n точек множества X, то есть $|X \cap S_a| \geqslant n$;
2. если $X \setminus S_a \neq \varnothing$, то существует число $\lambda_a \in \{1, 2\}$ такое, что для любой точки $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X$ выполняется $L_a(x) \pmod 3 \in \{0, \lambda_a\}$;
3. если $X \setminus S_a = \varnothing$, то для любой точки $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X$ выполняется уравнение $L_a(x) \equiv 0 \pmod 3$.

Пусть точки $z \in E_3^n$. Если $X \setminus S_a \neq \varnothing$, тогда точки z, удовлетворяющие условию $L_a(z) \equiv \lambda_a \pmod 3$ для каждой грани $L_a(x)$ выпуклой линейной оболочки множества X, будем называть *внутренними точками* выпуклой линейной оболочки множества X.

Определение 3. *Выпуклой линейной оболочкой* конечного множества точек $X \subset E_3^n$ называется множество

$$\operatorname{conv}(X) = \{L_a(x) \mid L_a(x) - \text{ грань выпуклой линейной оболочки } \}.$$

Определение 4. Выпуклая линейная оболочка $\operatorname{conv}(X)$ называется *непустой*, если её внутренность непуста. В противном случае выпуклая линейная оболочка называется *пустой*.

3. Вычислительный эксперимент

Для проверки предложенного метода проведён вычислительный эксперимент по распознаванию открытых и закрытых глаз на изображениях из набора данных [2]. Эксперимент включал следующие этапы.

Шаг 1. Формирование признаковых векторов. Обучающие выборки содержали 96 изображений открытых и 93 изображения закрытых глаз. С помощью библиотеки `dlib` [3] определялись характерные точки области глаз. На основе восьми выбранных точек с номерами 38, 39, 41, 42, 44, 45, 47, 48 вычислялись нормированные разности координат $\Delta = (\widetilde{x}_{41} - \widetilde{x}_{37},\ \widetilde{y}_{41} - \widetilde{y}_{37},\ \widetilde{x}_{40} - \widetilde{x}_{38},\ \widetilde{y}_{40} - \widetilde{y}_{38}, \widetilde{x}_{47} - \widetilde{x}_{43},\ \widetilde{y}_{47} - \widetilde{y}_{43},\ \widetilde{x}_{48} - \widetilde{x}_{44},\ \widetilde{y}_{48} - \widetilde{y}_{44})$, которые после дискретизации представлялись в виде векторов в пространстве E_3^8. В результате было получено 13 уникальных векторов для открытых глаз и 11 для закрытых глаз.

Шаг 2. Построение выпуклых линейных оболочек. Для каждого класса перебирались гиперплоскости пространства E_3^8 и проверялись условия, определяющие грани выпуклой линейной оболочки. Получено 57 граней для открытых глаз и 63 для закрытых глаз.

Шаг 3. Проверка непустоты оболочек. Установлено, что среди правильно классифицированных тестовых объектов доля точек, принадлежащих внутренности выпуклой линейной оболочки и не совпадающих с обучающими точками, составляет 55.32% для открытых глаз и 64.38% для закрытых глаз. Таким образом, эксперимент подтверждает, что распознавание основано на принадлежности объектов построенным выпуклым линейным оболочкам, а не только на совпадении с обучающей выборкой.

Шаг 4. Проверка пересечения оболочек. Установлено, что построенные выпуклые линейные оболочки двух классов не содержали общих точек. Случаи, когда объект принадлежит обеим оболочкам или не принадлежит ни одной из них, в настоящей работе рассматривались.

Шаг 5. Оценка качества распознавания. На независимых тестовых выборках правильно распознано 47 из 48 изображений открытых глаз и 73 из 76 изображений закрытых глаз. Точность составила соответственно 97.92% и 96.05%.

4. Выводы

В работе разработан метод классификации на основе выпуклых линейных оболочек конечных множеств точек над полем E_3 и применён к распознаванию открытых и закрытых глаз. Точность распознавания составила 97.92% для открытых глаз и 96.05% для закрытых. Метод не требует большого объема обучающих данных и обучения параметров модели. Вычислительная сложность построения граней оценивается как $O\left((N_o + N_c)n3^{n+1}\right)$, где N_o и N_c — количество различных обучающих векторов двух классов, а n — размерность пространства признаков, равное числу характерных точек глаз.

Список литературы

[1] Е. С. Ковалёва, “Метод распознавания изображений на основе выпуклой линейной оболочки над конечным полем”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **30**:3 (2026), 113–125.

[2] E. Kovaleva, *Faces with Open/Closed Eyes*, набор данных, дата обращения 10.03.2026, `https://www.kaggle.com/datasets/helen647135486/faces-with-open-closed-eyes`.

[3] Davis E. King, *Dlib C++ Library*, документация, дата обращения 10.03.2026, `http://dlib.net/`.

Статья поступила 10 октября 2026 г.

An Image Classification Method for Open and Closed Eyes Based on the Convex Linear Hull over a Finite Field

E. S. Kovaleva

We propose a method for classifying open and closed eyes based on the construction of convex linear hulls of finite point sets over the field $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$. A hyperplane is called a face if it contains at least n points of the original set and the corresponding linear form takes the same nonzero value $\lambda_a \in \{1, 2\}$ at all remaining points of the set. Membership of a point in the convex linear hull is determined by the conditions $L_a(x) \in \{0, \lambda_a\}$ for all its faces.

Keywords: convex linear hull, finite fields, E_3^n space, linear forms, pattern recognition, image classification.

References

[1] E. S. Kovaleva, “A finite-field convex linear hull-based recognition method”, *Intelligent Systems. Theory and Applications*, **30**:3 (2026), 113–125 (In Russian).

[2] E. Kovaleva, *Faces with Open/Closed Eyes*, dataset, accessed 10.03.2026, `https://www.kaggle.com/datasets/helen647135486/faces-with-open-closed-eyes`.

[3] Davis E. King, *Dlib C++ Library*, documentation, accessed 10.03.2026, `http://dlib.net/`.

Received on October 10, 2026