Модель гомеостаза эндокринной системы человека

Э. Э. Гасанов*, Н. И. Дейнека‡

В работе представлена математическая модель регуляции гомеостаза глюкозы, описывающая взаимодействие клеток поджелудочной железы, печени и периферических тканей. На основе дискретной динамической системы построена система обыкновенных дифференциальных уравнений, для которой установлены глобальное существование, единственность и аналитичность решений. Доказано существование и единственность положения равновесия системы.

Ключевые слова: эндокринная система, гибридный автомат, поджелудочная железа, глюкоза, инсулин, глюкагон, гликоген.

1. Введение

Поддержание концентрации глюкозы в крови обеспечивается сложным механизмом взаимодействия α- и β-клеток поджелудочной железы, печени, тканей, а также почек [1]. В работе рассматривается математическая модель регуляции уровня глюкозы, учитывающая секрецию инсулина и глюкагона клетками поджелудочной железы, поступление глюкозы из печени и её потребление различными группами тканей. Результат работы модели представлен дискретной динамической системой, на основе которой построена система обыкновенных дифференциальных уравнений. Исследуются вопросы существования, единственности и аналитичности решений полученной системы, а также существования и единственности её положения равновесия. Параметры используемых в модели уравнений подобраны таким образом, чтобы результаты функционирования составляющих элементов модели соответствовали физиологическим показателям метаболически здорового человека с индексом массы тела (ИМТ) в диапазоне 22–26 кг/м^2. Индекс массы тела представляет собой

Гасанов Эльяр Эльдарович — д. ф.-м. н., зав. каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: el_gasanov@mail.ru, ORCID: 0000-0002-0739-0967.

Gasanov Elyar Eldarovich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Head of Department of Mathematical Theory of Intelligent Systems, Faculty of Mechanics and Mathematics, Moscow State University.

‡*Дейнека Наталья Игоревна* — старший преподаватель, Филиал МГУ им. М. В. Ломоносова в г. Ташкенте, e-mail: dina_ukr@mail.ru, ORCID: 0009-0004-7661-3775.

Deyneka Natalya Igorevna — Lomonosov Moscow State University branch in Tashkent.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

показатель, рассчитываемый как отношение массы тела в килограммах к квадрату роста в метрах. Учёт ИМТ позволяет задать антропометрические характеристики человека, для которого разрабатывается модель, поскольку масса тела и состав тканей могут влиять на процессы обмена глюкозы [1]. Для упрощения расчётов в качестве базового значения массы тела принято 70 кг.

2. Основные понятия и формулировка результата

Модель, описывающая эндокринную систему, строится из четырех гибридных автоматов, описывающих функционирование соотвественно поджелудочной железы, печени, тканей и почек. Гибридный автомат — это автомат, у которого состояния, входные и выходные значения изменяются в дискретном времени, но являются вещественными числами. Предполагается отсутствие питания и нулевой запас гликогена печени в начальный момент.

Считаем, что длительность одного модельного шага равна h, а состояние системы на n-с модельном шаге описывается тремя переменными: концентрацией глюкозы s_n, инсулина i_n и глюкагона g_n.

Обозначим $\sigma(x) = 1/(1+e^{-x})$. Введём две промежуточные величины: $\widetilde{g}_n = g_n + 17\sigma(10 - s_n), \widetilde{s}_n = s_n + \frac{44.16}{0.45}\sigma(0.02\widetilde{g}_n - 8)$, где $\widetilde{g}_n$ — количество глюкагона после работы альфа-клеток поджелужочной железы, а $\widetilde{s}_n$ — концентрация глюкозы после производства её печенью, но до клеточного потребления.

После подстановки гибридных автоматов друг друга в соответствии с тем как они подключены друг к другу в организме суммарный функционал эндокринной системы описывается системой рекурентных уравнений:

$$\begin{cases} s_{n+1} = s_n + \dfrac{h}{0.45}(44.16\sigma(0.02\widetilde{g}_n - 8) + \ 0.3\sigma(0.6\widetilde{s}_n - 4.5) - + \\ \qquad + 0.2\sigma(0.6\widetilde{s}_n - 6)), \\ i_{n+1} = i_n + h(i_n + 136.8\sigma(s_n - 8) - 0.66 i_n), \\ g_{n+1} = g_n + h(13\sigma(10 - s_n) - 0.24 g_n). \end{cases} \tag{1}$$

Численные эксперименты, которые проводились с моделью показывают, что независимо от начального состояния системы, она всегда сходится к одной и той же точке равновесия. Чтобы обосновать этот факт попробуем перейти к системе дифференциальных уравнений.

Вводим непрерывные аналоги промежуточных величин: $\widetilde{g}(t) = g(t) + 17\sigma(10 - s(t))$, $\widetilde{s}(t) = s(t) + \frac{44.16}{0.45}\sigma(0.02\widetilde{g}(t) - 8)$. Полагая

$$\frac{s_{n+1} - s_n}{h} \approx \dot{s}, \qquad \frac{i_{n+1} - i_n}{h} \approx \dot{i}, \qquad \frac{g_{n+1} - g_n}{h} \approx \dot{g},$$

получаем систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{s} = \dfrac{1}{0.45}(44.16\,\sigma(0.02\widetilde{g} - 8) - 0.3\,\sigma(0.6\widetilde{s} - 4.5) - 0.2\,\sigma(0.6\widetilde{s} - 6)), \\ \dot{i} = 136.8\,\sigma(s - 8) - 0.66\,i, \\ \dot{g} = 13\,\sigma(10 - s) - 0.24\,g. \end{cases} \tag{2}$$

Теорема 1 (Глобальная разрешимость)**.** *Для любых начальных данных* $(s_0, i_0, g_0) \in \mathbb{R}^3$ *система* (2) *имеет единственное решение, определённое при всех* $t \in \mathbb{R}$ *и вещественно-аналитическое по времени.*

Идея доказательства. Правая часть системы является вещественно-аналитической на $\mathbb{R}^3$ и, следовательно, локально липшицевой, что обеспечивает локальное существование и единственность решения [2].

Ограниченность логистической функции позволяет установить условие линейного роста. Это исключает возникновение особенностей за конечное время и обеспечивает глобальное продолжение решения. Аналитичность решения следует из аналитичности правой части системы.

Теорема 2 (Существование и единственность положения равновесия)**.** *Система* (2) *имеет ровно одно положение равновесия* $x_* = (s_*, i_*, g_*) \in \mathbb{R}^3$, *которое при достаточно малом шаге дискретизации* h *является единственной неподвижной точкой дискретного оператора* (1).

Идея доказательства. Условия равновесия позволяют выразить концентрации инсулина и глюкагона через концентрацию глюкозы и свести задачу к скалярному уравнению $\Phi(s) = 0$, где

$$\Phi(s) = 44.16\,\sigma\left(0.02\left(\frac{13}{0.24} + 17\right)\sigma(10 - s) - 8\right) -$$

$$- 0.3\,\sigma\left(0.6\left(s + \frac{44.16}{0.45}\sigma\left(0.02\left(\frac{13}{0.24} + 17\right)\sigma(10 - s) - 8\right)\right) - 4.5\right) -$$

$$- 0.2\,\sigma\left(0.6\left(s + \frac{44.16}{0.45}\sigma\left(0.02\left(\frac{13}{0.24} + 17\right)\sigma(10 - s) - 8\right)\right) - 6\right).$$

Доказывается, что $\Phi'(s) < 0$ при всех $s \in \mathbb{R}$, причём

$$\lim_{s \to -\infty} \Phi(s) > 0, \qquad \lim_{s \to +\infty} \Phi(s) < 0.$$

Следовательно, уравнение имеет единственный действительный корень, определяющий единственное положение равновесия системы.

Следует отметить, что поведение дискретной модели хорошо согласуется с экспериментальными данными для описанной ситуации отсутствия питания и нулевого запаса гликогена печени [3].

Список литературы

[1] Н. Т. Старкова, *Клиническая эндокринология.*, М, 1991.

[2] Л. С. Понтрягин, *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, Наука, М., 1974, 331 с.

[3] G. Freckmann, S. Hagenlocher, A. Baumstark, N. Jendrike, R. C. Gillen, K. Rössner, C. Haug, "Continuous Glucose Profiles in Healthy Subjects under Everyday Life Conditions and after Different Meals", *Journal of Diabetes Science and Technology*, **1**:5 (2007), 695-703. DOI: 10.1177/193229680700100513.

Статья поступила 5 ноября 2026 г.

A model of homeostasis in the human endocrine system

E. E. Gasanov, N. I. Deyneka

This paper presents a mathematical model of glucose homeostasis regulation describing the interaction between pancreatic cells, the liver, and peripheral tissues. Based on a discrete dynamical system, a system of ordinary differential equations is constructed, for which the global existence, uniqueness, and analyticity of solutions are established. The existence and uniqueness of an equilibrium point of the system are proved.

Keywords: endocrine system, hybrid automata, pancreas, glucose, insulin, glucagon, glycogen.

References

[1] N. T. Starkova, *Clinical Endocrinology.*, M, 1991 (in Russian).

[2] L. S. Pontryagin, *Ordinary Differential Equations*, Nauka, Moscow, 1974 (in Russian), 331 pp.

[3] G. Freckmann, S. Hagenlocher, A. Baumstark, N. Jendrike, R. C. Gillen, K. Rössner, C. Haug, "Continuous Glucose Profiles in Healthy Subjects under Everyday Life Conditions and after Different Meals", *Journal of Diabetes Science and Technology*, **1**:5 (2007), 695-703. DOI: 10.1177/193229680700100513.

Received on November 5, 2026