Детерминированное приведение операторных матриц к слабой форме Попова

А. В. Носов*

Для матриц дифференциальных операторов первого порядка с невырожденной ведущей матрицей предложен детерминированный алгоритм dWPF, строящий слабую форму Попова с наименьшей среди результатов WPF суммарной степенью коэффициентов. Оптимум в одном столбце дает минимальное остовное дерево, столбцы согласуются перебором с отсечением. Дано сравнение с реализациями алгоритма WPF в SageMath и AbstractAlgebra.jl.

Ключевые слова: символьные вычисления, операторные матрицы, слабая форма Попова, рост коэффициентов.

1. Введение

Классический алгоритм WPF [1, 2] приводит операторную матрицу к слабой форме Попова элементарными операциями над строками. Он недетерминирован: выбор столбца, пары строк и заменяемой строки произволен, а результаты разных сценариев существенно различаются суммарной степенью коэффициентов [3]. Предложенный алгоритм dWPF строит однозначно определенный результат WPF с наименьшей такой степенью.

2. Постановка задачи

Рассматривается система $A_1y' + A_0y = 0$, где $A_1, A_0 \in \mathbb{Q}[x]^{m\times m}$ и $\det A_1 \neq 0$. Ей отвечает операторная матрица первого порядка $L = A_1\partial + A_0 \in \mathbb{Q}[x][\partial]^{m\times m}$ ($\partial = d/dx$) с элементами $l_{ij} = a_{ij}\partial + b_{ij}$. Так как $\det A_1 \neq 0$, в каждой строке есть элемент с $a_{ij} \neq 0$, и *опорный индекс* строки определяется как $I_i = \min\{j \mid a_{ij} \neq 0\}$. Матрица находится в *слабой форме Попова*, если опорные индексы ее строк попарно различны.

* *Носов Анатолий Владимирович* — аспирант каф. алгоритмических языков факультета ВМК МГУ, e-mail: t.nosv2016@yandex.ru.

Nosov Anatoly Vladimirovich — PhD student, Department of Algorithmic Languages, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Lomonosov Moscow State University.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

Если $I_i = I_j = p$ (*конфликт* в столбце p), то редукция строки i с помощью строки j ($i \leftarrow j$) выполняется как

$$L^{\text{new}}_{i,*} = \frac{\lambda}{a_{ip}} L_{i,*} - \frac{\lambda}{a_{jp}} L_{j,*}, \qquad \lambda = \operatorname{lcm}(a_{ip}, a_{jp}), \tag{1}$$

с последующим сокращением строки на НОД и нормированием (целые взаимно простые коэффициенты, старший коэффициент при ∂ в опорном столбце положителен). При этом коэффициент при ∂ в столбце p обращается в нуль, и опорный индекс строки i растет. Для строки $u = (a_1\partial + b_1, \ldots, a_m\partial + b_m)$ величина $\operatorname{totdeg} u$ — сумма степеней всех ее ненулевых многочленов a_j, b_j. *Стоимость* матрицы определяется как $c(M) = \sum_i \operatorname{totdeg} M_{i,*}$. Через $\mathcal{W}(L)$ обозначим множество результатов алгоритма WPF для L. Задача — детерминированно найти $W \in \mathcal{W}(L)$ с минимальной стоимостью $c(W)$.

Неоднозначность алгоритма WPF проявляется, например, при обработке матрицы $\begin{bmatrix} (x+1)\partial - x & (2x+1)\partial + x \\ \partial - 1 & -2 \end{bmatrix}$: одной редукции достаточно, но замена первой строки дает результат стоимости 2, а второй — 6.

3. Алгоритм dWPF

В алгоритме dWPF объединены три идеи. Во-первых, *дисциплина крайнего левого столбца*: редукция выполняется только в самом левом столбце $p^*(M)$ с конфликтом, и ни одна матрица из $\mathcal{W}(L)$ при этом не теряется. Строки с $I_i < p^*(M)$ больше не меняются, что дает монотонную нижнюю границу стоимости $h(M) = \sum_{i:\, I_i < p^*(M)} \operatorname{totdeg} M_{i,*}$.

Во-вторых, выбор среди t строк $r_1, \ldots, r_t$ с опорным индексом p сводится к задаче на полном графе G_t, где вес ребра $\{i, j\}$ равен totdeg строки, полученной редукцией r_i с помощью r_j по формуле (1). Разрешение конфликта соответствует корневому дереву графа: корень — строка, сохраняющая опорный индекс p, остальные строки редуцируются с помощью родителя. Наименьший суммарный totdeg строк после разрешения конфликта равен $\operatorname{MST}(G_t, w) + \min_{v_0} \operatorname{totdeg} r_{v_0}$, где MST — вес минимального остовного дерева.

В-третьих, оптимум для одного столбца не гарантирует глобального, так как отредуцированная строка может затем участвовать в конфликте в одном из следующих столбцов. Например, для матрицы L_{ex} со строками $(\partial, \partial, 0, \partial)$, $(\partial, (x-1)\partial, 0, 0)$, $(\partial, x+1, \partial, 0)$, $(0, (x-1)\partial, 0, 2)$ минимальное остовное дерево в столбце 1 (вес 2 против 3 у другого дерева) приводит к итоговой стоимости 7 вместо 4. Поэтому алгоритм перебирает с возвра-

том все корневые деревья, храня наименьшую найденную стоимость c^*, и отсекает ветвь с промежуточной матрицей N, если $h(N) > c^*$.

При равных стоимостях выбирается *каноническая* матрица с лексикографически наименьшим (порядок $\prec$) кодом $\kappa(M)$ из степеней и коэффициентов элементов по строкам.

Теорема 1. *Матрица W, возвращаемая алгоритмом dWPF, 1) принадлежит $\mathcal{W}(L)$; в частности, находится в слабой форме Попова и $W = UL$, где $U \in \mathbb{Q}(x)^{m\times m}$, $\det U \neq 0$; 2) имеет минимальную стоимость среди матриц из $\mathcal{W}(L)$; 3) канонична относительно порядка $\prec$ среди матриц минимальной стоимости и потому однозначно определяется входом.*

4. Реализация и сравнение

Алгоритм реализован в пакете `dwpf` для SageMath 10.9. При $\det A_1 \neq 0$ множители редукций лежат в $\mathbb{Q}(x)$, и к L как к полиномиальной матрице над $\mathbb{Q}(x)[\partial]$ применимы реализации WPF `weak_popov_form` из SageMath и `weak_popov` из AbstractAlgebra.jl [4] (в них опорная позиция крайняя правая, поэтому порядок столбцов обращается, а результат нормируется). Ниже $\bar{c}$ — средняя стоимость на 100 случайных матрицах при $m = 3$ и 4, q — доля матриц, где у dWPF она меньше:

Реализация	$\bar{c}$, $m=3$	q	$\bar{c}$, $m=4$	q
dWPF	9,01	—	18,33	—
SageMath	10,14	51 %	21,01	64 %
AbstractAlgebra.jl	10,08	47 %	20,25	58 %

По времени dWPF уступает: 0,25 и 4,84 с на набор при $m = 3$ и 4 против не более 0,13 с. Отсечение по h (400 матриц, $m = 3$) сократило число раскрытых состояний на 19,5 %, не изменив ответов.

5. Заключение

Открытыми остаются случай $\det A_1 = 0$ и согласование столбцов без перебора.

Список литературы

[1] T. Mulders, A. Storjohann, “On lattice reduction for polynomial matrices”, *Journal of Symbolic Computation*, **35**:4 (2003), 377–401. DOI: 10.1016/S0747-7171(02)00139-6.

[2] B. Beckermann, H. Cheng, G. Labahn, "Fraction-free row reduction of matrices of Ore polynomials", *Journal of Symbolic Computation*, **41**:5 (2006), 513–543. DOI: 10.1016/j.jsc.2005.10.002.

[3] А. В. Носов, А. А. Панфёров, "Эвристический алгоритм приведения операторных матриц по строкам", *Ломоносовские чтения. Научная конференция: тезисы докладов*, МАКС Пресс, М., 2025, 182–184.

[4] C. Fieker, W. Hart, T. Hofmann, F. Johansson, "Nemo/Hecke: Computer algebra and number theory packages for the Julia programming language", *Proc. 2017 ACM Int. Symp. on Symbolic and Algebraic Computation (ISSAC'17)*, ACM, New York, 2017, 157–164. DOI: 10.1145/3087604.3087611.

Статья поступила 9 ноября 2026 г.

Deterministic computation of the weak Popov form of an operator matrix

A. V. Nosov

For first-order differential operator matrices with a nonsingular leading matrix, a deterministic algorithm dWPF is proposed that constructs a weak Popov form of minimum total coefficient degree among the results of WPF. The optimum for one column is given by a minimum spanning tree; columns are coordinated by branch and bound. The results are compared with WPF implementations in SageMath and AbstractAlgebra.jl.

Keywords: symbolic computation, operator matrices, weak Popov form, coefficient growth.

References

[1] T. Mulders, A. Storjohann, "On lattice reduction for polynomial matrices", *Journal of Symbolic Computation*, **35**:4 (2003), 377–401. DOI: 10.1016/S0747-7171(02)00139-6.

[2] B. Beckermann, H. Cheng, G. Labahn, "Fraction-free row reduction of matrices of Ore polynomials", *Journal of Symbolic Computation*, **41**:5 (2006), 513–543. DOI: 10.1016/j.jsc.2005.10.002.

[3] A. V. Nosov, A. A. Panferov, "Evristicheskii algoritm privedeniya operatornykh matrits po strokam", *Lomonosovskie chteniya. Nauchnaya konferentsiya: tezisy dokladov*, MAKS Press, Moscow, 2025, 182–184 (in Russian).

[4] C. Fieker, W. Hart, T. Hofmann, F. Johansson, "Nemo/Hecke: Computer algebra and number theory packages for the Julia programming language", *Proc. 2017 ACM Int. Symp. on Symbolic and Algebraic Computation (ISSAC'17)*, ACM, New York, 2017, 157–164. DOI: 10.1145/3087604.3087611.

Received on November 9, 2026