Субрезультантный алгоритм для наибольшего общего делителя полиномов с несколькими параметрами

С. А. Абрамов*, А. А. Рябенко‡

Предлагается алгоритм, на вход которого подаются два полинома, зависящих, кроме основной переменной ("неизвестной") x, еще и от переменных $a_1, \ldots, a_s$, выступающих как параметры, которые могут принимать различные значения. Исследуется вопрос о наибольшем общем делителе исходных полиномов в зависимости от использованных значений параметров.

Ключевые слова: полиномы с параметрами, цепочка субрезультантов, наибольший общий делитель, компьютерная алгебра.

1. Субрезультантный алгоритм

Исходные данные — два полинома $u, v \in K[x, a_1, \ldots, a_s]$, $\deg_x u = m$, $\deg_x v = n$, в которых $a_1, \ldots, a_s$ рассматриваются как параметры, принимающие значения в поле K или некотором его расширении. Результант $\mathrm{Res}_x(u, v) \in K[a_1, \ldots, a_s]$ — полином, обращающийся для конкретных значений $\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_s$ параметров в 0, если и только если полиномы u, v имеют при этих значениях наибольший общий делитель (НОД) положительной степени по x.

Для случая одного параметра задача определения вида НОД в зависимости от значений параметра решена в [1, 2]. В настоящей заметке мы переносим этот же подход на случай нескольких параметров. Полиномы нескольких переменных имеют свою специфику, которая может препятствовать привлечению подходов, вполне успешных в случае одной переменной. В нашей работе это сказалось, в основном, на представлении итогов выполнения алгоритма — разд. 2.

* *Абрамов Сергей Александрович* — доктор физ.-мат. наук, главный науч. сотр., Федерального исследовательского центра "Информатика и управление" РАН, e-mail: sergeyabramov@mail.ru, ORCID: 0000-0001-7745-5132.

Abramov Sergei Aleksandrovich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Chief Researcher, Federal Research Center "Computer Science and Control" RAS.

‡ *Рябенко Анна Андреевна* — канд. физ.-мат. наук, старший науч. сотр. Федерального исследовательского центра "Информатика и управление" РАН, e-mail: anna.ryabenko@gmail.com, ORCID: 0000-0001-5780-7743.

Ryabenko Anna Andreevna — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior Researcher, Federal Research Center "Computer Science and Control" RAS.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

Этот подход дает, в частности, возможность установить для заданного натурального t, существуют ли такие значения параметров, для которых степень НОД рассматриваемых полиномов становится равной t, и указать вид такого НОД при положительном ответе. Для нахождения значений параметров, обеспечивающих это, может потребоваться рассмотрение и решение системы нелинейных алгебраических уравнений.

Связь субрезультантов с общими делителями и с операцией деления полиномов с остатком обсуждалась, например, в [5, 6].

Построив цепочку субрезультантов (см., например, [5], [6])

$$S_0(x), S_1(x), \ldots, S_{\min(m,n)}(x), \tag{1}$$

можно затем выписать условия, которым должны удовлетворять обнуляющие S_0 значения $\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_s$ параметров, для того, чтобы полином НОД(u, v) для таких значений имел положительную степень t (В коэффициенты полинома НОД(u, v) могут входить $\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_s$). Должны существовать значения $\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_s$ при которых коэффициент при x^t в полиноме S_t не равен 0, но для каждого $i = 0, \ldots, t-1$ при этих значениях параметров будет нулевым коэффициент при x^i в S_i (отметим, что $\deg_x S_t \le t$ во всех возможных случаях).

2. На выходе алгоритма

Выписываются все возможности, соответствующие предположениям, что для данных значений параметров какое-то число первых элементов $S_0, \ldots, S_{i-1}$ цепочки (1) имеют нулевые коэффициенты при степенях $x^0, \ldots, x^{i-1}$ соответственно. Применение алгоритма дает список пар полиномов

$$(L_i(a_1, \ldots, a_s), \;\; F_i(x, \tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_s)), \;\; i = 0, \ldots, \min(m, n).$$

Если $L_0(\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_s) \neq 0$, то полиномы u, v имеют лишь тривиальный делитель: $F_0 = 1$. Для $i > 0$ если $L_0(\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_s) = \cdots = L_{i-1}(\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_s) = 0$, но $L_i(\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_s) \neq 0$, то искомый НОД — это $F_i(x, \tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_s)$.

3. Пример

Рассмотрим полиномы $u = (a+b)x^2 + ax + b$, $v = 3x^2 + 2x + 1$ от переменной x с двумя параметрами a, b. Цепочка субрезультантов: $S_0 = 2(a-2b)^2$, $S_1 = (-a+2b)x + a - 2b$, $S_2 = 3x^2 + 2x + 1$. Первая пара полиномов: $L_0 = S_0$, $F_0 = 1$. Если $a \neq 2b$, то полиномы u, v имеют лишь тривиальный общий

делитель. Вторая пара: $L_1 = -a + 2b$, $F_1 = S_1$. Для $L_0 = 0$ существует решение $a = 2b$, но при этом не выполняется $L_1 \neq 0$, т.е. не существует общего делителя u, v степени 1. Третья пара: $L_2 = 3$, $F_2 = S_2$. Для u, v существует общий делитель $3x^2 + 2x + 1$, поскольку существует решение $a = 2b$ системы $L_0 = 0$, $L_1 = 0$ и при этом выполняется $3 \neq 0$.

4. Возможное применение

Для дифференциальной системы, лорановы коэффициенты которой заданы алгоритмически, алгоритм [4] строит все лорановы решения до любой заданной степени. Используется индуцированная рекуррентная система, которой удовлетворяют последовательности коэффициентов лорановых решений исходной дифференциальной системы. При необходимости к индуцированной системе применяется алгоритм EG-исключений [3] для получения системы с невырожденной ведущей матрицей. Этот же алгоритм может быть применен в случае усеченной дифференциальной системы при использовании алгоритма вычисления наибольшего общего делителя полиномов одной переменной с несколькими параметрами.

Список литературы

[1] С.А. Абрамов, К.Ю. Квашенко, “Наибольший общий делитель полиномов, зависящих от параметра”, *Вестник Московского университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика*, 1993, № 2, 65–71.

[2] S.A. Abramov, K.Yu. Kvashenko, “On the greatest common divisor of polynomials which depend on a parameter”, *Proceedings of the 1993 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, Association for Computing Machinery, 1993, 152–156. DOI: 10.1145/164081.164112.

[3] S. Abramov, “EG–eliminations”, *J. of Difference Equations and Applications*, 1999, № 5, 393–433. DOI: 10.1080/10236199908808199.

[4] S. Abramov, M.A. Barkatou, D.E.Khmelnov, “On full rank differential systems with power series coefficients”, *Journal of Symbolic Computation*, **68** (2015), 120–137. DOI: 10.1016/j.jsc.2014.08.010.

[5] Р. Лоос, “Обобщенные последовательности полиномиальных остатков”, *Компьютерная алгебра: Символьные и алгебраические вычисления*, ред. Б. Бухбергер, Дж. Коллинз и Р. Лоос, Мир, 1986, 151–177.

[6] Bhubaneswar Mishra, *Algorithmic algebra*, Springer-Verlag, 1993. DOI: 10.1007/978-1-4612-4344-1.

Статья поступила 10 ноября 2026 г.

Subresultant algorithm for the greatest common divisor of polynomials with several parameters

S. A. Abramov, A. A. Ryabenko

An algorithm is proposed that takes as input two polynomials; in addition to the primary variable ("unknown") x, these polynomials also depend on variables $a_1, \ldots, a_s$, which act as parameters that can take on various values. The study examines the greatest common divisor of the original polynomials as a function of the values assigned to these parameters.

Keywords: polynomials with parameters, subresultant chain, greatest common divisor, computer algebra.

References

[1] S.A. Abramov, K.Yu. Kvashenko, "The greatest common divisor of polynomials depending on a parameter", *Moscow University Journal. Series 15. Computational Mathematics and Cybernetics*, 1993, № 2, 65–71 (in Russian).

[2] S.A. Abramov, K.Yu. Kvashenko, "On the greatest common divisor of polynomials which depend on a parameter", *Proceedings of the 1993 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, Association for Computing Machinery, 1993, 152–156. DOI: 10.1145/164081.164112.

[3] S. Abramov, "EG–eliminations", *J. of Difference Equations and Applications*, 1999, № 5, 393–433. DOI: 10.1080/10236199908808199.

[4] S. Abramov, M.A. Barkatou, D.E.Khmelnov, "On full rank differential systems with power series coefficients", *Journal of Symbolic Computation*, **68** (2015), 120–137. DOI: 10.1016/j.jsc.2014.08.010.

[5] R. Loos, "Generalized polynomial remainder sequences", *Computer Algebra. Symbolic and Algebraic Computation. Computing Supplementum*, **4**, eds. B. Buchberger, G.E. Collins, R. Loos, Springer, Vienna, 1982, 115–137. DOI: 10.1007/978-3-7091-3406-1_9.

[6] Bhubaneswar Mishra, *Algorithmic algebra*, Springer-Verlag, 1993. DOI: 10.1007/978-1-4612-4344-1.

Received on November 10, 2026