Критериальная система универсальности минимальных функций, реализуемых нейронными схемами

А. А. Хусаенов*

В настоящей работе определена приведенная критериальная система замкнутых по операциям суперпозиции классов для проверки функций $f(x, y)$, реализуемых нейронными схемами $\sum$ из 5 элементов множества $B = \{x + y, \frac{1}{2}x, -x, \theta(x)\}$, где $\theta(x) = 1$ при $x \geq 0$ и $\theta(x) = 0$ при $x < 0$, на универсальность в классе кусочно-параллельных функций над кольцом двоично-рациональных чисел [2].

Ключевые слова: минимальные универсальные функции, класс кусочно-параллельных функций, нейронные схемы.

1. Введение

Мы используем операции суперпозиции из [1]. В работах [4, 5] показано, что в классе $L(\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}})$ кусочно-параллельных функций [2] над кольцом двоично-рациональных чисел $\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}} = \left\{\frac{m}{2^n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}_+\right\}$ существует функция, реализуемая схемой из пяти элементов множества B и являющаяся универсальной функцией — то есть функцией, из которой с использованием операции суперпозиции можно получить все функции из $L(\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}})$. В работе [3] показано, что сложность схем $\sum$ в базисе B, реализующих универсальные функции, не может быть меньше 5 и найдены все схемы сложности 5, реализующие универсальные функции, которые называются минимальными универсальными функциями.

В настоящей работе определена критериальная система замкнутых по операциям суперпозиции классов, невключение в каждый класс которой функции сложности 5 равносильно ее универсальности. Эта система

Хусаенов Артём Азатович — младший научный сотрудник кафедры математической теории интеллектуальных систем механико-математического факультета МГУ имени М.В.Ломоносова, преподаватель кафедры финансовых технологий и анализа данных факультета компьютерных наук Высшей школы экономики, исполнительный директор по исследованию данных департамента цифровых каналов ПАО Сбербанк, e-mail: a.khusaenov@mail.ru, ORCID: 0009-0004-5291-4645.

Khusaenov Artem Azatovich — Department of Mathematical Theory of Intelligent Systems junior research fellow, Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University; lecturer of Faculty of Computer Science, Higher School of Economics; Executive Director of Data Research, Digital Channels Department, Sberbank.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

является приведенной, то есть после удаления из нее любого класса полученная система не является критериальной, и состоит из максимальных по включению собственных подмножеств $L(\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}})$. Линейные составляющие функции из $L(\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}})$ являются однородными аффинными функциями вида:

$$l_f(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i,\ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ \text{где } a_i \in \mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}},\ i = \overline{1, n} \qquad (1)$$

Важно заметить, что класс $L(\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}})$ [2] содержит, например, нейроны модели Мак-Каллока и Питтса [6] с весами из кольца двоично-рациональных чисел и все нейронные схемы, получаемые суперпозициями таких нейронов. При этом двоично-рациональными числами можно приближать действительные числа с любой заданной точностью. То есть использование функций из $L(\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}})$ не создает ограничения общности в вопросе представимости функций, реализуемых нейронными схемами в модели Мак-Каллока и Питтса.

2. Основные результаты

Для проверки функций сложности 5 на минимальную универсальность получена приведенная критериальная система замкнутых классов $L(\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}})$:

$$J' = \{T_1, T_2, T_{int}, T_{\leq 1}, T_{\geq 0}, A_3, A_5\} \qquad (2)$$

где:

$$T_1 = \{f \mid f \in L(\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}}), f(1, ..., 1) = 1\},$$
$$T_2 = \{f \mid f \in L(\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}}), f(2, ..., 2) = 2\},$$

$$T_{int} = \{f \mid f \in L(\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}}),\ \text{если для } f \text{ выполнено (1), то } a_i \in \mathbb{Z},\ i = \overline{1, n}\},$$

$$T_{\geq 0} = \{f \mid f \in L(\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}}),\ \text{если для } f \text{ выполнено (1), то } a_i \geq 0,\ i = \overline{1, n}\},$$

$$T_{\leq 1} = \{f \mid f \in L(\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}}),\ \text{если для } f \text{ выполнено (1), то } \sum_{i=1}^{n} |a_i| \leq 1, i = \overline{1, n}\},$$

$$A_p = \{f \mid f \in L(\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}}),\ \text{если для } f \text{ выполнено (1), то}$$
$$\frac{m'}{2^{n'}} = \sum_{i=1}^{n} a_i, p|(m' - 2^{n'})\}.$$

Теорема 1. *Функция $f(x,y)$ из множества кусочно-параллельных функций $L(\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}})$, реализуемая схемой из 5 элементов в базисе $B = \{x+y, \frac{1}{2}x, -x, \theta(x)\}$, является универсальной тогда и только тогда, когда она не содержится полностью ни в одном из классов $J' = \{T_1, T_2, T_{int}, T_{\leq 1}, T_{\geq 0}, A_3, A_5\}$.*

Теорема 2. *Классы, содержащиеся в множестве J', являются предполными в $L(\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}})$ и образуют приведенную критериальную систему для минимальных универсальных функций в $L(\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}})$.*

Список литературы

[1] С. В. Яблонский, *Введение в дискретную математику*, издание 2, Наука, М., 1986.

[2] В. С. Половников, "О задаче проверки функциональной полноты в классе кусочно-параллельных функций", *Вестник Московского университета. Серия 1: Математика, механика.*, **63**:6 (2008), 31–35.

[3] А. А. Часовских, М. В. Агафонова, А. А. Хусаенов, Е. И. Яковенко, "Минимальные универсальные элементы в классе нейронных схем", *Дискретная математика*, **37**, 2025, 130–144. DOI: 10.4213/dm1893.

[4] М. В. Агафонова, "О классе нейронных функций с двоично-рациональными параметрами", *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **22**:1 (2018), 7–19.

[5] М. В. Агафонова, "О минимальной Шефферовой функции в классе кусочно-параллельных функций, определенных над двоично-рациональными числами", *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **23**:1 (2019), 107–116.

[6] W. S. McCulloch, W. Pitts, "A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity", *The Bulletin of Mathematical Biophysics*, **5**:4 (1943), 115–133.

Статья поступила 10 ноября 2026 г.

A criterial system for the universality of minimal functions implemented by neural schemes

A. A. Khusaenov

In this paper, we define a specific criterion system for classes of functions closed under the operation of superposition. This system is used to test whether functions $f(x,y)$ realizable by neural schemes $\sum$ consisting of 5 elements from the set $B = \{x+y, \frac{1}{2}x, -x, \theta(x)\}$ are universal within the class of piecewise-parallel functions [2].

Keywords: minimal universal functions, class of piecewise parallel functions, neural schemes.

References

[1] S. V. Yablonsky, *Introduction to discrete mathematics*, 2nd ed., Nauka, Moscow, 1986.

[2] V. S. Polovnikov, "Problem of checking the functional completeness in the class of piecewise parallel functions", *Moscow University Mathematics Bulletin*, **63**:6 (2008), 31–35.

[3] A. A. Chasovskikh, M. V. Agafonova, A. A. Khusaenov, E. I. Yakovenko, "Minimal universal elements in the class of neural circuits", *Diskretnaya Matematika*, **37**, 2025, 130–144. DOI: 10.4213/dm1893.

[4] M. V. Agafonova, "On a class of neural functions with binary-rational parameters", *Intelligent systems. Theory and applications*, **22**:1 (2018), 7–19.

[5] M. V. Agafonova, "On a minimal Sheffer function in the class of piecewise-parallel functions defined over binary rational numbers", *Intelligent systems. Theory and applications*, **23**:1 (2019), 107–116.

[6] W. S. McCulloch, W. Pitts, "A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity", *The Bulletin of Mathematical Biophysics*, **5**:4 (1943), 115–133.

Received on November 10, 2026