Решение задачи раскраски графов на основе DSatur и PI-GNN

Д. А. Филатов*

В данной работе исследуется синергетический (гибридный) подход к решению задачи раскраски графов, основанный на интеграции классического эвристического алгоритма DSatur и физически-информированной графовой нейронной сети PI-GNN. Предложенный подход направлен на улучшение точности и стабильности раскраски по сравнению с изолированным использованием нейросетевых моделей. Приводятся результаты сравнительного анализа предложенного метода с другими алгоритмами на графах различной размерности.

Ключевые слова: задача раскраски графов, Graph Coloring Problem, GCP, графовые нейронные сети, GNN, PI-GNN, DSatur.

1. Введение

Задача раскраски графов (GCP) заключается в поиске минимального количества цветов для разметки вершин графа, при котором любые две смежные вершины имеют разные цвета. В данной статье исследуется синергетический (гибридный) подход к ее решению, основанный на интеграции классического эвристического алгоритма DSatur и физически-информированной графовой нейронной сети PI-GNN.

2. Описание предложенного подхода

Для раскраски графов эффективны графовые нейронные сети (GNN), обрабатывающие топологические структуры. Особый интерес представляет концепция PI-GNN (Physics-Informed Graph Neural Networks) [3], внедряющая математические ограничения в функцию потерь нейросети. Гибридные методы позволяют сочетать сильные стороны различных алгоритмов [1]. В данной работе описывается интеграция алгоритма DSatur в результаты модели PI-GNN [2].

* *Филатов Д. А.* — аспирант, Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., e-mail: `filatoff.denis2018@yandex.ru`.

Filatov D. A. — Postgraduate student, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

Используемая модель построена на базе архитектуры PIGCN из 4 сверточных слоев, функционирующих по принципу передачи сообщений (Message Passing), где каждый слой агрегирует информацию от соседей с помощью полносвязных блоков. Обучение выполнялось без учителя с помощью оптимизатора Adam и планировщика CosineAnnealingLR на основе функции потерь из работы [3]. Обучающая выборка формировалась методом тихой подстановки (Quiet Planting) [4], синтезирующим графы с известным эталонным решением. Процедура обучения и раскраски базируется на алгоритмах из [3]. В экспериментах использовались синтетические графы с хроматическим числом $\chi = 5$ и средней степенью вершины c, $12.5 \leq c \leq 15.0$. Подробное описание модели и ее программная реализация приведены в [2]. Интеграция PI-GNN с DSatur заключается в поиске конфликтных вершин при использовании PI-GNN и их устранении с помощью DSatur. Конфликтными признаются вершины, имеющие общие одноцветные рёбра; их цвета сбрасываются, после чего они последовательно перекрашиваются по критерию максимальной насыщенности DSatur. При отсутствии свободного цвета вершине присваивается цвет с минимальным числом локальных конфликтов.

3. Результаты и выводы

В таблице 1 представлены результаты сравнительного анализа решения GCP методами PI-GNN, гибридным подходом, жадным алгоритмом (Greedy), DSatur и имитацией отжига (SA). Эксперименты выполнялись на Python в Google Colab на базе GPU NVIDIA A100 для 30 графов связности c.

Модели PI-GNN, гибридный метод и SA ограничены бюджетом в 5 цветов ($\chi = 5$) и минимизируют долю конфликтов. Эвристики Greedy и DSatur используют стратегию расширения палитры, вводя дополнительный цвет. Таким образом, прямые показатели недопустимых рёбер у двух групп методов отражают несколько разные методологические подходы к управлению ресурсами палитры: поиск точной раскраски путем минимизации хроматического числа против аппроксимации в жестко фиксированном количестве цветов. Настройки SA: начальная температура $T_0 = 10.0$, скорость охлаждения $\alpha = 0.995$, лимит 2000 итераций. В ходе наблюдений за результатами работы программы допустимой долей конфликтов (одноцветных ребер) было принято значение не более 2%. Для оценки статистической значимости в таблицу внесены 95%-е доверительные интервалы (95% ДИ) для средней доли конфликтов, рассчитанные на основе t-распределения Стьюдента.

Таблица 1: Сравнительный анализ на графах различной размерности

Показатель	Графы с 5 тыс. вершин					Графы с 10 тыс. вершин				
	PI-GNN	PI-GNN + DSatur	Greedy	DSatur	SA	PI-GNN	PI-GNN + DSatur	Greedy	DSatur	SA
Минимальная доля конфликтов	2,04 %	1,63 %	6,94 %	0,00 %	14,92 %	1,71 %	1,71 %	6,31 %	0,00 %	18,09 %
Средняя доля конфликтов	2,19 %	1,89 %	6,94 %	0,00 %	15,54 %	1,83 %	1,78 %	6,31 %	0,00 %	18,31 %
95% ДИ для конфликтов	[2,17; 2,21]	[1,83; 1,95]	[6,94; 6,94]	[0,00; 0,00]	[15,38; 15,70]	[1,81; 1,85]	[1,77; 1,79]	[6,31; 6,31]	[0,00; 0,00]	[18,25; 18,37]
Максимальная доля конфликтов	2,27 %	1,98 %	6,94 %	0,00 %	16,29 %	1,93 %	1,79 %	6,31 %	0,00 %	18,64 %
Доля успешных запусков (< 2% конфл.)	0,00 %	100 %	0,00 %	100 %	0,00 %	100 %	100 %	0,00 %	100 %	0,00 %
Среднее время решения (мс)	153,93	5238,11	17,67	7492,14	12542,87	247,22	8189,54	39,07	12075,57	16961,00
Стандартное отклонение	0,05 %	0,17 %	0,00 %	0,00 %	0,46 %	0,04 %	0,03 %	0,00 %	0,00 %	0,15 %
Коэффициент вариации	2,41 %	9,16 %	0,00 %	0,00 %	2,95 %	2,37 %	1,81 %	0,00 %	0,00 %	0,84 %
Число цветов	5	5	6	6	5	5	5	6	6	5

На графах с 10 тыс. вершин гибридный подход улучшил точность раскраски по сравнению с чистой PI-GNN: снизились максимальная и средняя доли конфликтов, а коэффициент вариации уменьшился на четверть. Недостаток — увеличение времени работы, однако метод работает быстрее DSatur и SA. Алгоритмы DSatur и Greedy потребовали на один цвет больше. Для графов с 5 тыс. вершин выводы аналогичны. Важное отличие: гибрид значительно уменьшает долю конфликтов, что подтверждает эффективность интеграции DSatur в модель PI-GNN для графов небольшой размерности. Эксперименты на графах со 100 тыс. вершин вывели результаты только для PI-GNN и Greedy; остальные методы остановлены по тайм-ауту. Жадный алгоритм использовал 6 цветов при конфликтах около 6%, тогда как PI-GNN показала разброс конфликтов менее 2% [2]. Эксперименты проведены на ансамбле синтетических planted-графов. В дальнейшем планируется провести верификацию модели на разреженных, структурных и реальных графах.

4. Заключение

Таким образом, в данной работе было показано, что комбинация DSatur и PI-GNN увеличивает время работы по сравнению с изолированной нейросетевой моделью PI-GNN, для графов большой размерности результат не выводится из-за комбинаторных ограничений DSatur. Для улучшения качества раскраски требуется более точное внедрение DSatur в модель PI-GNN либо использование другого гибридного подхода. Однако для графов относительно небольшой размерности (до 10 тыс. вершин) предложенный гибрид способен эффективно снижать долю конфликтов в условиях фиксированного цветового бюджета.

Список литературы

[1] А. В. Гагарин, Р. К. Газизов, “Гибридный генетический нейросетевой алгоритм в задаче идентификации параметров цифровых моделей”, *Вестник УГАТУ*, **13**:2 (2009), 246–256.

[2] Д. А. Филатов, “Решение задачи раскраски графов с помощью графовых нейронных сетей”, *Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории: Материалы*, XXV Междунар. конф. (Тула, 06–10 октября 2026 года), ТГПУ им. Толстого Л. Н., Тула, 2026, 221–225.

[3] L. Colantonio, A. Cacioppo, F. Scarpati, M. Chiara Angelini, F. Ricci-Tersenghi, S. Giagu, “Efficient Graph Coloring with Neural Networks: A Physics-Inspired Approach for Large Graphs”, *Nature Machine Intelligence*, **6** (2024), 942–953.

[4] F. Krzakala, L. Zdeborová, “Hiding quiet solutions in random constraint satisfaction problems”, *Physical Review Letters*, **102**:23 (2009), 238701. DOI: 10.1103/physrevlett.102.238701.

Статья поступила 10 октября 2026 г.

Solving the Graph Coloring Problem via DSatur and PI-GNN

D. A. Filatov

This paper explores a synergistic (hybrid) approach to solving the Graph Coloring Problem (GCP), based on the integration of the classic heuristic DSatur algorithm and the physics-informed graph neural network. The proposed hybrid approach aims to improve coloring accuracy and stability compared to using neural network models in isolation. The results of a comparative analysis of the proposed method against classical algorithms on graphs of various sizes are presented.

Keywords: graph coloring problem, GCP, graph neural networks, GNN, PI-GNN, DSatur.

References

[1] A. V. Gagarin, R. K. Gazizov, “Hybrid genetic neural network algorithm in the problem of identifying parameters of digital models”, (In Russian), *Vestnik UGATU*, **13**:2 (2009), 246–256.

[2] D. A. Filatov, “Graph Coloring Using Graph Neural Networks”, *Algebra, Number Theory, Discrete Geometry and Multiscale Modeling: Modern Problems, Applications and Problems of History: Materials of the XXV International Conference*, TSPU, Tula, 2026, 221–225 (in Russian).

[3] L. Colantonio, A. Cacioppo, F. Scarpati, M. C. Angelini, F. Ricci-Tersenghi, S. Giagu, “Efficient Graph Coloring with Neural Networks: A Physics-Inspired Approach for Large Graphs”, *Nature Machine Intelligence*, **6** (2024), 942–953.

[4] F. Krzakala, L. Zdeborová, “Hiding quiet solutions in random constraint satisfaction problems”, *Physical Review Letters*, **102**:23 (2009), 238701. DOI: 10.1103/physrevlett.102.238701.

Received on October 10, 2026