Обратный синтез нечётких операторов агрегации в однородных моделях оценки риска

Ф. А. Федотов*, А. П. Рыжов‡

Рассматривается обратная задача выбора нечёткого конъюнктивного агрегатора в однородной древовидной модели оценки риска. Требуется, чтобы агрегатор был устойчив к фоновым изменениям и достаточно чувствительно реагировал на локальный инцидент. В классе строгих архимедовых t-норм показано, что корневое значение однородного дерева и его локальные чувствительности выражаются через аддитивный генератор и его профиль. На этой основе формулируется оптимизационная задача выбора агрегатора; в степенном классе профилей она сводится к одномерной оптимизации.

Ключевые слова: нечёткая агрегация, t-норма, аддитивный генератор, однородная модель, оценка риска, обратная задача, чувствительность.

Рассматривается модель оценки риска в виде дерева с $n \geq 2$ листьями, в которых заданы нормированные оценки состояния $x_1, \ldots, x_n \in (0, 1]$. Большие значения соответствуют более благоприятному состоянию, а значение в корне дерева определяет итоговую оценку системы. Такие модели естественно возникают в задачах оценки риска и информационной безопасности [1]. Если итоговая оценка должна учитывать одновременное выполнение нескольких требований, агрегация имеет конъюнктивный характер; поэтому используются t-нормы и общая теория функций агрегации [2, 3]. Цель работы состоит в обратном выборе агрегатора по требованиям к его реакции на локальный инцидент и к устойчивости относительно фоновых изменений.

* *Федотов Фёдор Алексеевич* — аспирант каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: fedor.a.fedotov@math.msu.ru, ORCID: 0009-0001-7307-9122.

Fedotov Fedor Alekseevich — PhD student, Department of Mathematical Theory of Intelligent Systems, Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

‡ *Рыжов Александр Павлович* — д.т.н., профессор каф. интеллектуальных информационных технологий ф-та ВМК МГУ, e-mail: ryjov@mail.ru, ORCID: 0000-0001-7022-5166.

Ryjov Alexander Pavlovich — Doctor of Technical Sciences, Professor, Department of Intelligent Information Technologies, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Lomonosov Moscow State University.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

В качестве базового класса берутся строгие архимедовы t-нормы с аддитивным генератором [2, 4]:

$$T(x,y) = g^{-1}\big(g(x) + g(y)\big),$$

где $g : (0,1] \to [0,+\infty)$, $g(1) = 0$, g строго убывает и $g(x) \to +\infty$ при $x \to 0+$. Показано, что при использовании одного и того же локального оператора во всех внутренних вершинах дерева корневое значение имеет вид

$$R(x_1,\ldots,x_n) = g^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} g(x_i)\right).$$

В силу ассоциативности T это значение не зависит от формы дерева.

Пусть g непрерывно дифференцируема и $h(x) = -g'(x) > 0$ — профиль генератора. Тогда локальная чувствительность корня по отдельному листу выражается формулой

$$\frac{\partial R}{\partial x_k} = \frac{h(x_k)}{h(R)}.$$

Дополнительно вводится условие невозрастания h, обеспечивающее глобальную 1-липшицевость агрегатора относительно нормы ℓ_1 [5].

Требования к агрегатору формализуются в инцидентно-фоновом сценарии $(t,a,\ldots,a)$: здесь t — значение инцидентного листа, а a — общий фоновый уровень. Пара (t,a) берётся из области

$$\Omega_+ = \{(t,a) : a \in [a_-,a_+],\ t \in [t_{\min},\eta a]\}, \quad 0 < \eta < 1,$$

где $0 < a_- \le a_+ \le 1$ и $0 < t_{\min} \le \eta a_-$. В фоновом состоянии $R_n(a) = g^{-1}(ng(a))$, а при одном инцидентном листе

$$R_n(t,a) = g^{-1}\big(g(t) + (n-1)g(a)\big).$$

Вводится несколько важных характеристик:

$$I_n(t,a) = \frac{h(t)}{h(R_n(t,a))}, \qquad B_n(t,a) = (n-1)\frac{h(a)}{h(R_n(t,a))},$$

$$\Gamma_n(t,a) = \frac{I_n(t,a)}{B_n(t,a)} = \frac{1}{n-1}\frac{h(t)}{h(a)} \quad \text{— селективность},$$

$$D_n(t;a) = R_n(a) - R_n(t,a) \quad \text{— детекция}.$$

Регуляризатор

$$J_{\mathrm{reg}}(T) = \sup_{(t,a)\in\Omega_+} \ln\frac{h(t)}{h(a)}$$

ограничивает чрезмерную резкость профиля, а целевым функционалом служит максимальная фоновая шумовая чувствительность $J_{\text{noise}}(T) = \sup_{(t,a)\in\Omega_+} B_n(t,a)$. Положим $\Gamma_\Omega^{\min}(T) = \inf_{(t,a)\in\Omega_+} \Gamma_n(t,a)$ и $D_\Omega^{\min}(T) = \inf_{(t,a)\in\Omega_+} D_n(t;a)$. При заданных порогах $\Gamma^* > 0$, $D^* > 0$, $M \geq 0$ ставится обратная задача:

$$\min_T J_{\text{noise}}(T), \qquad \Gamma_\Omega^{\min}(T) \geq \Gamma^*, \quad D_\Omega^{\min}(T) \geq D^*, \quad J_{\text{reg}}(T) \leq M.$$

Для выделения явного подкласса агрегаторов вводится дополнительное требование относительной инвариантности селективности: $\Gamma_n(t,a) = \Phi(t/a)$ при всех $0 < t < a \leq 1$ для некоторой функции Φ. Показано, что это условие приводит к степенному виду профиля

$$h_\alpha(x) = Cx^{-\alpha}, \qquad \alpha \geq 1.$$

Соответствующие операторы принадлежат семейству t-норм Швейцера–Склара [2].

В степенном классе условия на селективность и регулярность дают явные границы параметра α, определяющие базовый интервал $I_0 = [\alpha_L, \alpha_M]$ при условии его непустоты. Остальные характеристики также выражаются через α, однако соответствующие ограничения и целевой функционал имеют более сложный вид. Поэтому окончательная задача решается численно:

$$\min_{\alpha\in A_{\text{pow}}} J_{\text{noise}}(T_\alpha), \qquad A_{\text{pow}} = \{\alpha \in I_0 : D_\Omega^{\min}(T_\alpha) \geq D^*\}.$$

Для иллюстрации при $n = 5$, $\eta = 0.97$, $t_{\min} = 0.2$, $a_- = 0.4$, $a_+ = 0.64$, $\Gamma^* = 0.27$, $D^* = 0.0015$, $M = 10$ численно получены $I_0 \approx [2.5267, 8.5973]$, $A_{\text{pow}} \approx [3.5995, 8.5973]$, $\alpha_{\text{opt}} \approx 5.0280$ и $J_{\text{noise}}(T_{\alpha_{\text{opt}}}) \approx 0.6174$. В данном сценарии ограничение на детекцию уточняет нижнюю границу допустимого множества. В общем случае характер активных ограничений и положение оптимума зависят от параметров задачи.

Полученная схема задаёт процедуру выбора конъюнктивного агрегатора с учётом реакции на инцидент и фоновые изменения. Намечены её расширения на многопараметрические профили, неоднородные и взвешенные схемы агрегации.

Список литературы

[1] Joint Task Force Transformation Initiative, *Guide for Conducting Risk Assessments. NIST Special Publication 800-30, Revision 1*, National Institute of Standards and Technology, Gaithersburg, MD, 2012. DOI: 10.6028/NIST.SP.800-30r1.

[2] E. P. Klement, R. Mesiar, E. Pap, *Triangular Norms*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000. DOI: 10.1007/978-94-015-9540-7.

[3] M. Grabisch, J.-L. Marichal, R. Mesiar, E. Pap, *Aggregation Functions*, Cambridge University Press, Cambridge, 2009. DOI: 10.1017/CBO9781139644150.

[4] E. P. Klement, R. Mesiar, E. Pap, "Generated triangular norms", *Kybernetika*, **36**:3 (2000), 363–377.

[5] A. Kolesárová, "1-Lipschitz aggregation operators and quasi-copulas", *Kybernetika*, **39**:5 (2003), 615–629 .

Статья поступила 6 октября 2026 г.

Inverse Synthesis of Fuzzy Aggregation Operators in Homogeneous Risk Assessment Models

F. A. Fedotov, A. P. Ryjov

We consider an inverse problem of choosing a fuzzy conjunctive aggregation operator in a homogeneous tree-based risk assessment model. The aggregator is required to be stable with respect to background changes and sufficiently sensitive to a local incident. In the class of strict Archimedean t-norms, the root value of a homogeneous tree and its local sensitivities are expressed through an additive generator and its profile. This leads to an optimization problem for choosing the aggregator; in the power class of profiles, the problem is reduced to one-dimensional optimization.

Keywords: fuzzy aggregation, t-norm, additive generator, homogeneous model, risk assessment, inverse problem, sensitivity.

References

[1] Joint Task Force Transformation Initiative, *Guide for Conducting Risk Assessments. NIST Special Publication 800-30, Revision 1*, National Institute of Standards and Technology, Gaithersburg, MD, 2012. DOI: 10.6028/NIST.SP.800-30r1.

[2] E. P. Klement, R. Mesiar, E. Pap, *Triangular Norms*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000. DOI: 10.1007/978-94-015-9540-7.

[3] M. Grabisch, J.-L. Marichal, R. Mesiar, E. Pap, *Aggregation Functions*, Cambridge University Press, Cambridge, 2009. DOI: 10.1017/CBO9781139644150.

[4] E. P. Klement, R. Mesiar, E. Pap, "Generated triangular norms", *Kybernetika*, **36**:3 (2000), 363–377.

[5] A. Kolesárová, "1-Lipschitz aggregation operators and quasi-copulas", *Kybernetika*, **39**:5 (2003), 615–629.

Received on October 6, 2026