Кодирование замкнутых ломаных локальными отношениями площадей

Ван Сыжэнь*

Предложен способ кодирования, основанный на ориентированных площадях треугольников, для проверки аффинной эквивалентности замкнутых ломаных на плоскости. Нормированные разности ориентированных площадей, задаваемые вершинами ломаной и соседними с ними точками, объединяются в матрицу. Для двух замкнутых ломаных с одинаковым числом вершин, вершины каждой из которых не лежат все на одной прямой, доказано: эквивалентность кодов равносильна существованию обратимого аффинного преобразования, сопоставляющего вершины с точностью до циклического сдвига или обращения порядка.

Ключевые слова: замкнутые ломаные, ориентированная площадь, аффинные инварианты, полнота.

1. Введение

Одна из основных задач распознавания изображений, представленных конечными множествами точек, — проверка их геометрической эквивалентности. Координаты меняются при преобразованиях, поэтому геометрическое кодирование даёт числовое представление для сравнения; при полноте кода задача сводится к проверке эквивалентности кодов. В. Н. Козлов [1] доказал аффинную полноту кода из индексированных отношений площадей треугольников с точностью до перенумерации для множеств, не покрываемых двумя параллельными прямыми.

П. Г. Агниашвили [2] дал критерий однозначного восстановления по отношениям объёмов без знаков с точностью до аффинной эквивалентности с сохранением нумерации для конечных множеств, аффинно порождающих пространство произвольной конечной размерности. Д. В. Алексеев [3] предложил алгоритм восстановления по отношениям площадей со стёртыми индексами при общем положении треугольников с оценкой $O(n^9)$ для целочисленных координат (n — число точек).

* *Ван Сыжэнь* — аспирант каф. МаТИС мех.-мат. факультета МГУ; науч. руководители: Вадим Никитович Козлов и Дмитрий Владимирович Алексеев, e-mail: sirenexcelsior@gmail.com, ORCID: 0009-0002-9775-4003.

Wang Siren — PhD student, Chair of Mathematical Theory of Intelligent Systems, Faculty of Mechanics and Mathematics, MSU; supervisors: Vadim Nikitovich Kozlov and Dmitry Vladimirovich Alekseev.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

Рассмотрим замкнутую плоскую ломаную $P = (p_0, \dots, p_{n-1})$ с заданным циклическим соседством вершин, $p_n = p_0$, $n \geq 3$, вершины которой не лежат все на одной прямой. Индексы берутся по модулю n. При сохранении циклического соседства достаточно рассмотреть $2n$ соответствий, задаваемых начальной вершиной и направлением обхода. Построим код из нормированных разностей ориентированных площадей и докажем, что эквивалентность кодов равносильна аффинной эквивалентности.

2. Построение матрицы отношений площадей

Д. В. Ронжин [4] с помощью спектральной нормировки матриц разброса свёл рассматриваемую задачу аффинного совмещения множеств точек к ортогональному совмещению. Аналогично, для устранения влияния переноса выберем начало координат в центре масс вершин $\mu = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} p_i$ и положим $y_i = p_i - \mu$. Далее, для устранения изменения масштаба площадей при аффинном преобразовании введём ковариационную матрицу $\Sigma = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} y_i y_i^\top$. Из неравенства Коши–Буняковского и условия, что вершины не лежат все на одной прямой, следует $\det\Sigma > 0$. Положим $g = \sqrt{\det\Sigma} > 0$. В стандартной прямоугольной системе координат обозначим ориентированную площадь треугольника с вершинами p, q, r через $\mathcal{A}(p, q, r) = \frac{1}{2}\det(q - p, r - p)$.

При $p_{i-1} \neq p_{i+1}$ соседние с p_i вершины задают ориентированное основание $p_{i-1}p_{i+1}$. Для сравнения ориентированных высот p_i, p_j относительно него введём разность площадей

$$\begin{aligned}\Delta_{ij} &= \mathcal{A}(p_{i-1}, p_{i+1}, p_j) - \mathcal{A}(p_{i-1}, p_{i+1}, p_i)\\ &= \mathcal{A}(p_i, p_{i+1}, p_j) - \mathcal{A}(p_i, p_{i-1}, p_j), \qquad 0 \leq i, j < n.\end{aligned}$$

Знак Δ_{ij} определяет направление изменения ориентированной высоты, а модуль — величину изменения площади. Если $p_{i-1} = p_{i+1}$, формула остаётся корректной и даёт $\Delta_{ij} = 0$. Таким образом, локальное соседство задаёт сравнение положения p_j с p_i. Нормируя площади, определим код $S(P) = (S_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$:

$$S_{ij} = \frac{\Delta_{ij}}{g}, \qquad 0 \leq i, j < n. \tag{1}$$

При обратимом аффинном преобразовании $x' = Ax + b$ обозначим штрихом преобразованные величины. Тогда $\Delta'_{ij} = (\det A)\Delta_{ij}$, $\Sigma' = A\Sigma A^\top$, $g' = |\det A| g$. Следовательно, $S' = \operatorname{sgn}(\det A) S$: при сохранении ориентации плоскости матрица не меняется, а при изменении ориентации вся матрица умножается на -1.

3. Эквивалентность кодов и аффинная полнота

Определение (эквивалентность кодов). Матрица $S(P)$ из (1) служит кодом ломаной. Для другой такой ломаной $Q = (q_0, \dots, q_{n-1})$ положим $Q^{(k,\varepsilon)} = (q_k, q_{k+\varepsilon}, \dots, q_{k+\varepsilon(n-1)})$, $0 \le k < n$, $\varepsilon \in \{1, -1\}$. Коды эквивалентны, если для некоторых k, ε

$$S(Q^{(k,\varepsilon)}) = S(P) \qquad \text{или} \qquad S(Q^{(k,\varepsilon)}) = -S(P). \tag{2}$$

Определение (аффинная эквивалентность). Ломаные P, Q аффинно эквивалентны, если обратимое аффинное преобразование сопоставляет их вершины с точностью до циклического сдвига или обращения порядка.

Теорема 1 (Аффинная полнота)**.** *Пусть P, Q — две замкнутые ломаные на плоскости с одинаковым числом вершин $n \ge 3$, вершины каждой из которых не лежат все на одной прямой. Они аффинно эквивалентны тогда и только тогда, когда их коды эквивалентны.*

Идея доказательства. Необходимость следует из закона преобразования ориентированных площадей при обратимом аффинном преобразовании.

Обратно, пусть коды эквивалентны; обозначим соответствующие вершины через p_i, q_i. Матрица нормированных ориентированных площадей с элементами $C_{ij}(P) = \mathcal{A}(\mu_P, p_i, p_j)/g_P$ восстанавливается по системе $C_{i+1,j} - C_{i-1,j} = S_{ij} - \frac{1}{n}\sum_{\ell=0}^{n-1} S_{i\ell}$ при условиях $C^\top = -C$, $C\mathbf{1} = 0$, где $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)^\top$. Существование решения следует из геометрического определения C. Разность H любых двух решений удовлетворяет $H_{i+2,j} = H_{ij}$, $H^\top = -H$, $H\mathbf{1} = 0$. Поэтому диагональные элементы и суммы столбцов равны нулю. При нечётном n каждый столбец постоянен и потому нулевой. При чётном n он постоянен на строках каждой чётности: класс с диагональным элементом нулевой, другой — также в силу нулевой суммы столбца. Значит, $H = 0$. Таким образом, решение единственно, и эквивалентность кодов влечёт $C(Q) = \sigma C(P)$, $\sigma \in \{1, -1\}$.

Положим $u_i = p_i - \mu_P$, $v_i = q_i - \mu_Q$ и выберем r, s с $C_{rs}(P) \ne 0$. Тогда (u_r, u_s) и (v_r, v_s) — базисы. Координаты u_i и v_i в соответствующих базисах совпадают, поскольку выражаются отношениями элементов C, в которых множитель σ сокращается. Следовательно, обратимое аффинное преобразование с $A = (v_r\ v_s)(u_r\ u_s)^{-1}$, $b = \mu_Q - A\mu_P$ переводит p_i в q_i для всех i.

Сложность проверки. В модели вещественных вычислений для каждого из $2n$ вариантов соответствия построение и сравнение матриц кодов требуют $O(n^2)$ времени. Поэтому проверка по коду занимает $O(n^3)$ времени в худшем случае.

Список литературы

[1] В. Н. Козлов, “Распознавание изображений, представляемых конечным множеством точек”, *Фундаментальная и прикладная математика*, **15**:5 (2009), 95–110.

[2] П. Г. Агниашвили, “Однозначность восстановления изображения по его коду в n-мерном случае”, *Интеллектуальные системы*, **15**:1–4 (2011), 293–332.

[3] Д. В. Алексеев, “К вопросу о восстановлении изображения по стертому коду”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **27**:2 (2023), 49–67.

[4] Д. В. Ронжин, “Распознавание динамики особых точек в видеоряде”, *Интеллектуальные системы*, **18**:2 (2014), 267–276 .

Статья поступила 24 октября 2026 г.

Encoding closed polygonal chains using local area relations

Wang Siren

An encoding method based on oriented triangle areas is proposed for deciding affine equivalence of closed planar polygonal chains. The method arranges normalized oriented-area differences generated by the vertices of the chain and their neighbors into a matrix. For two closed polygonal chains with the same number of vertices, with the vertices of each chain not all collinear, equivalence of their codes is proved equivalent to the existence of an invertible affine transformation matching their vertices up to a cyclic shift or a reversal of order.

Keywords: closed polygonal chains, oriented area, affine invariants, completeness.

References

[1] V. N. Kozlov, “Recognition of images represented by a finite set of points”, (In Russian), *Fundamentalnaya i Prikladnaya Matematika*, **15**:5 (2009), 95–110.

[2] P. G. Agniashvili, “Uniqueness of image reconstruction from its code in the n-dimensional case”, (In Russian), *Intelligent Systems*, **15**:1–4 (2011), 293–332.

[3] D. V. Alekseev, “On image reconstruction from an erased code”, (In Russian), *Intelligent Systems. Theory and Applications*, **27**:2 (2023), 49–67.

[4] D. V. Ronzhin, “Recognition of the dynamics of keypoints in a video sequence”, (In Russian), *Intelligent Systems*, **18**:2 (2014), 267–276.

Received on October 24, 2026