Нижняя граница расширения произведения линейных кодов

А. А. Юсуфова*, Г. В. Калачев‡

Работа посвящена исследованию коэффициента расширения произведения (product expansion) линейных кодов — параметра, возникающего при изучении когранічного расширения и конструкций локально тестируемых и квантовых кодов. Для m-мерного произведения линейных кодов одинаковой длины n получена общая нижняя оценка $\rho \geq 1/(\lceil m/2 \rceil n^{\lceil m/2 \rceil})$. Кроме того, для трёхмерного случая построено семейство кодов на основе кодов Рида–Соломона, для которого коэффициент расширения имеет порядок $1/n^2$. Тем самым полученная нижняя оценка при $m = 3$ является точной по порядку.

Ключевые слова: линейные коды, произведение кодов, расширение произведения, когранічное расширение.

1. Введение

Произведения линейных кодов и связанные с ними конструкции возникают при изучении локально тестируемых и квантовых кодов [1–3]. Одной из характеристик таких конструкций является расширение произведения (product expansion), тесно связанное с когранічным расширением комплексов, соответствующих произведениям линейных кодов.

Для пары кодов свойство расширения произведения связано с робастной тестируемостью (robust testability) и тестируемостью на согласованность (agreement testability) [4, 5]. Однако в многомерном случае приведённые свойства уже не совпадают [5].

Естественным образом возникает вопрос о том, какие нижние оценки на коэффициент ρ можно получить для произвольного набора линей-

Юсуфова Алина Алмасовна — студентка факультета прикладной математики и информатики филиала МГУ имени М. В. Ломоносова в г. Ташкенте, e-mail: yusufova.alinochka@mail.ru, ORCID: 0009-0007-4090-8215.

Yusufova Alina Almasovna — Student, Faculty of Applied Mathematics and Computer Science, Tashkent Branch of Lomonosov Moscow State University.

‡*Калачев Глеб Вячеславович* — канд. физ.-мат. наук, с. н. с. лаборатории проблем теоретической кибернетики мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: gleb.kalachev@yandex.ru, ORCID: 0000-0003-2695-3179.

Kalachev Gleb Vyacheslavovich — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior Researcher, Laboratory of Problems of Theoretical Cybernetics, Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

ных кодов. В настоящей работе этот вопрос исследуется для m-мерного произведения кодов одинаковой длины.

2. Основные определения

Приведём основные определения, следуя [4]. Пусть заданы линейные коды $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_m$ над $\mathbb{F}_q$, где $\mathcal{C}_i \subseteq \mathbb{F}_q^{n_i}$. Здесь и далее $[n] = \{1, \ldots, n\}$. Через $\mathcal{L}_i$ обозначим множество линий, параллельных i-й координатной оси в m-мерной решётке $[n_1] \times \cdots \times [n_m]$, то есть

$$\mathcal{L}_i := \{A_1 \times \cdots \times A_m \subseteq [n_1] \times \cdots \times [n_m] \mid A_i = [n_i], \forall j \neq i : |A_j| = 1\}.$$

Для набора $\mathcal{C} = (\mathcal{C}_i)_{i\in[m]}$ линейных кодов над $\mathbb{F}_q$ будет удобно использовать обозначение $\otimes\mathcal{C} := \mathcal{C}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{C}_m$. Для каждого $i \in [m]$ положим

$$\mathcal{C}^{(i)} := \mathbb{F}_q^{n_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{C}_i \otimes \cdots \otimes \mathbb{F}_q^{n_m} = \left\{c \in \mathbb{F}_q^{n_1\times\cdots\times n_m} \;\middle|\; \forall \ell \in \mathcal{L}_i : c|_\ell \in \mathcal{C}_i\right\}.$$

Тогда *тензорным произведением кодов* $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_m$ называется код

$$\otimes\mathcal{C} = \bigcap_{i\in[m]} \mathcal{C}^{(i)}.$$

Как и в [4], определим код

$$\boxplus\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \boxplus \cdots \boxplus \mathcal{C}_m := \left(\mathcal{C}_1^\perp \otimes \cdots \otimes \mathcal{C}_m^\perp\right)^\perp = \sum_{i\in[m]} \mathcal{C}^{(i)}.$$

Для $x \in \mathbb{F}_q^{n_1\times\cdots\times n_m}$ обозначим $|x|_i$ количество линий $\ell \in \mathcal{L}_i$, для которых $x|_\ell \neq 0$. Здесь $|x|$ обозначает *вес Хэмминга* (то есть количество ненулевых элементов). Легко видеть, что введённые нормы связаны неравенством $|x| \leq n_i|x|_i$, $i \in [m]$.

Определение 1 (Коэффициент расширения произведения кодов)**.** Набор $\mathcal{C} = (\mathcal{C}_i)_{i\in[m]}$ называется ρ-расширяющим, если для каждого $c \in \boxplus\mathcal{C}$ существует представление

$$c = \sum_{i\in[m]} a_i, \qquad a_i \in \mathcal{C}^{(i)},$$

такое, что

$$\rho \sum_{i\in[m]} n_i|a_i|_i \leq |c|.$$

Коэффициентом расширения набора кодов $\mathcal{C}$ называется величина

$$\rho(\mathcal{C}) := \max\{\rho \in [0,1] \colon \mathcal{C} \text{ является } \rho\text{-расширяющим}\}.$$

3. Основные результаты

Теорема 1. *Существует семейство линейных* $\{\mathcal{C}_n\}_{n=2}^{\infty}$, *где* $\mathcal{C}_i \subseteq \mathbb{F}_{q_n}^n$, $q_n = 2^{\lceil \log_2 n \rceil}$, *размерности* $\left\lceil \frac{2n}{3} \right\rceil$, *такое, что*

$$\rho(\mathcal{C}_n, \mathcal{C}_n, \mathcal{C}_n) \leq \frac{6}{n^2}$$

для всех $n \geq 2$.

Замечание. Коды в теореме изоморфны укороченным кодам Рида-Соломона.

В двумерном случае полезно иметь в виду следующий простой пример. Пусть рассматривается пара кодов $(\mathcal{C}, \mathcal{C}^{\perp})$. Поскольку $(\mathcal{C}^{\perp})^{\perp} = \mathcal{C}$, для этой пары выполнено условие $\mathcal{C}_2^{\perp} \subseteq \mathcal{C}_1$. Поэтому, если H_1 и H_2 — соответствующие проверочные матрицы, то $H_1 H_2^T = 0$, а значит $H_1 I_n H_2^T = 0$. Тогда единичная матрица I_n принадлежит коду $\mathcal{C} \boxplus \mathcal{C}^{\perp}$. При этом $|I_n| = n$, но для её разложения через строки и столбцы требуется не менее n линий. Отсюда следует оценка

$$\rho(\mathcal{C}, \mathcal{C}^{\perp}) \leq \frac{1}{n}.$$

Теорема 2. *Пусть* $\mathcal{C} = (\mathcal{C}_i)_{i \in [m]}$, *где* $\mathcal{C}_i \subseteq \mathbb{F}_q^n$ *и* $m \geq 2$. *Тогда*

$$\rho(\mathcal{C}) \geq \frac{1}{\lceil m/2 \rceil \, n^{\lceil m/2 \rceil}}.$$

При $m = 3$ эта оценка даёт $\rho(\mathcal{C}) = \Omega(n^{-2})$. В силу первой теоремы для трёхмерного случая порядок $1/n^2$ является точным.

Список литературы

[1] I. Dinur, S. Liu, R. Y. Zhang, “New Codes on High Dimensional Expanders”, *40th Computational Complexity Conference (CCC 2025)*, Leibniz International Proceedings in Informatics (LIPIcs), **339**, Schloss Dagstuhl – Leibniz-Zentrum fuer Informatik, Dagstuhl, Germany, 2025, 27:1–27:42.

[2] G. Kalachev, P. Panteleev, “Maximally Extendable Product Codes are Good Coboundary Expanders”, *66th IEEE Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, FOCS 2025. DOI: 10.1109/focs63196.2025.00079, 2025, 1512–1524.

[3] Г. В. Калачев, П. А. Пантелеев, “Семейство асимптотически хороших квантовых и локально тестируемых классических LDPC-кодов”, *Математические вопросы кибернетики*, **21**, ФИЗМАТЛИТ, Москва. DOI: 10.20948/mvk-2023-111, 2023, 111–155.

[4] G. Kalachev, P. Panteleev, “Two-sided Robustly Testable Codes”, arXiv: 2206.09973.

[5] Г. В. Калачев, “Многомерное расширение произведений кодов сильнее робастной тестируемости и тестируемости на согласованность”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **30**:2 (2026), 101–119.

Статья поступила 15 сентября 2026 г.

A lower bound on the expansion of product codes

A. A. Yusufova, G. V. Kalachev

The paper is devoted to the study of the product expansion coefficient of linear codes — a parameter arising in the study of coboundary expansion and constructions of locally testable and quantum codes. For an m-dimensional product of linear codes of the same length n, we obtain the general lower bound $\rho \geq 1/(\lceil m/2 \rceil n^{\lceil m/2 \rceil})$. In addition, in the three-dimensional case, we construct a family of codes based on Reed–Solomon codes for which the expansion coefficient is of order $1/n^2$. Thus, for $m = 3$, the obtained lower bound is asymptotically tight.

Keywords: linear codes, product codes, product expansion, coboundary expansion.

References

[1] I. Dinur, S. Liu, R. Y. Zhang, “New Codes on High Dimensional Expanders”, *40th Computational Complexity Conference (CCC 2025)*, Leibniz International Proceedings in Informatics (LIPIcs), **339**, Schloss Dagstuhl – Leibniz-Zentrum fuer Informatik, Dagstuhl, Germany, 2025, 27:1–27:42.

[2] G. Kalachev, P. Panteleev, “Maximally Extendable Product Codes are Good Coboundary Expanders”, *66th IEEE Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, FOCS 2025. DOI: 10.1109/focs63196.2025.00079, 2025, 1512–1524.

[3] G. V. Kalachev, P. A. Panteleev, “Asymptotically Good Quantum and Locally Testable Classical LDPC Codes”, *Matematicheskie Voprosy Kibernetiki*, **21**, FIZMATLIT, Moscow. DOI: 10.20948/mvk-2023-111, 2023, 111–155 (In Russian).

[4] G. Kalachev, P. Panteleev, “Two-sided Robustly Testable Codes”, arXiv: 2206.09973.

[5] G. V. Kalachev, “High-Dimensional Expansion of Product Codes is Stronger than Robust and Agreement Testability”, *Intelligent Systems. Theory and Applications*, **30**:2 (2026), 101–119 (In Russian).

Received on September 15, 2026