О решении задач бинарной оптимизации с использованием алгоритма QAOA

А. Ю. Чернявский*, Б. И. Бантыш‡, Д. А. Куликов§, Е. О. Киктенко¶

Рассматривается решение задачи QUBO с использованием QAOA с фиксированными параметрами и числом слоев, линейно растущим с размером задачи. Результаты численного эксперимента показывают, что при увеличении размера задачи медианное число запусков схемы, необходимое для получения решения с заданным коэффициентом аппроксимации, вопреки ожиданию не возрастает. В ходе анализа запутанности обнаружено неожиданное убывание её пикового значения с ростом глубины. На основе этого наблюдения построен полностью классический квантово-вдохновлённый алгоритм, в котором запутанность отсутствует. На тестовых наборах GSet MaxCut размером до 20 000 переменных отношение найденного разреза к наилучшему известному превышает 0.95 в подавляющем большинстве случаев.

Ключевые слова: QAOA, QUBO, MaxCut, фиксированные параметры, запутанность.

Многие задачи дискретной оптимизации — включая поиск максимального разреза графа, задачи размещения и планирования — сводятся к задаче оптимизации квадратичной бинарной функции без ограничений (QUBO):

$$z^* = \arg\min_{z\in\{\pm1\}^n} C(z), \qquad C(z) = \sum_{i<j} s_{ij} z_i z_j + \sum_i s_{ii} z_i. \tag{1}$$

* *Чернявский Андрей Юрьевич* — канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр., Российский квантовый центр, e-mail: a.chernyavskii@rqc.ru, ORCID: 0000-0001-8768-5855.

Chernyavskiy Andrey Yurievich — Cand. Sci. (Phys.-Math.), Senior Researcher, Russian Quantum Center.

‡ *Бантыш Борис Игоревич* — канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр., Российский квантовый центр, e-mail: b.bantysh@rqc.ru, ORCID: 0000-0003-3533-787X.

Bantysh Boris Igorevich — Cand. Sci. (Phys.-Math.), Senior Researcher, Russian Quantum Center.

§ *Куликов Денис Александрович* — младший научный сотрудник, Российский квантовый центр, e-mail: d.kulikov@rqc.ru, ORCID: 0009-0007-9700-9683.

Kulikov Denis Alexandrovich — Junior Researcher, Russian Quantum Center.

¶ *Киктенко Евгений Олегович* — канд. физ.-мат. наук, мл. рук. науч. группы, Российский квантовый центр, e-mail: e.kiktenko@rqc.ru, ORCID: 0000-0001-5760-441X.

Kiktenko Evgeniy Olegovich — Cand. Sci. (Phys.-Math.), Junior Principal Investigator, Russian Quantum Center.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

Здесь $s_{ij} \in \mathbb{R}$ — коэффициенты задачи, n — число бинарных переменных.

Один из подходов к решению таких задач — квантовый алгоритм приближённой оптимизации (QAOA) [1]. Он формирует параметризованное квантовое состояние

$$|\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}\rangle = \prod_{\ell=1}^{p} e^{-i\beta_\ell H_M} e^{-i\gamma_\ell H_P} |+\rangle^{\otimes n}, \tag{2}$$

где H_P — диагональный гамильтониан задачи, такой что $H_P|z\rangle = C(z)|z\rangle$, $H_M = \sum_i \sigma_x^{(i)}$ — смешивающий гамильтониан, p — число слоев схемы, а $\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{R}^p$ — вариационные параметры.

Наиболее распространённая реализация QAOA предполагает гибридную квантово-классическую оптимизацию: схема запускается многократно, по результатам измерений оценивается целевая функция, а параметры обновляются классическим оптимизатором. С ростом глубины ландшафт оптимизации усложняется, а бесплодные плато и статистический шум существенно затрудняют настройку параметров [2]. Альтернатива — QAOA с фиксированными параметрами (fpQAOA) [3]: параметры подбираются один раз на малых задачах, а затем применяются к задачам произвольного размера.

Рассматривается режим fpQAOA с глубиной $p = n$ и тремя ключевыми элементами [4]: обучение по вероятности достижения заданного коэффициента аппроксимации α; sin-cos параметризация углов

$$\gamma_\ell = u \sin\Big[\big(\ell - \tfrac{1}{2}\big)\tfrac{\pi}{2n}\Big], \qquad \beta_\ell = v \cos\Big[\big(\ell - \tfrac{1}{2}\big)\tfrac{\pi}{2n}\Big], \tag{3}$$

где u и v — всего два скалярных параметра; нормировка матрицы задачи $S = \{s_{ij}\}$ на норму Фробениуса, $\|S\|_F = 1$, которая выравнивает характерные масштабы разных задач. Качество работы измеряется ожидаемым числом независимых прогонов схемы до получения решения требуемого качества: $\mathrm{STS}_\alpha = 1/P_\alpha(u, v)$, где P_α — вероятность измерить битовую строку, для которой $(C(z) - c_{\min})/(c_{\max} - c_{\min}) \le 1 - \alpha$, а $c_{\min}$ и $c_{\max}$ — минимальное и максимальное значения целевой функции.

Результаты численного эксперимента на шести ансамблях случайных задач QUBO, суммарно более 150 000 экземпляров, показали, что при увеличении n медианное значение $\mathrm{STS}_{0.95}$ вопреки ожиданию не возрастает, а в большинстве случаев убывает.

Чтобы понять причину такого поведения, мы исследовали запутанность в динамике fpQAOA методом матричных произведений состояний (MPS) [5]. Параметр χ задаёт предельный объём запутанности, который может быть представлен в этом формате, и определяет стоимость

вычислений. Расчёты для n до 50 кубитов и p до 100 показали, что пиковое значение χ неожиданно убывает с ростом глубины и выходит на насыщение.

Убывание запутанности с ростом глубины мотивирует радикальное упрощение: зафиксировать $\chi = 1$ и после каждого двухчастичного взаимодействия проецировать состояние на многообразие факторизованных состояний. Это приводит к нелинейному классическому алгоритму. В блоховском представлении состояние каждой переменной описывается единичным вектором, а обновление пары переменных сводится к элементарным операциям — вычислению синуса, косинуса и нормировке, — без сингулярного разложения, что даёт линейные затраты памяти и численную устойчивость.

На стандартных тестовых наборах GSet MaxCut размером до 20 000 переменных алгоритм находит разрезы, отношение которых к наилучшим известным значениям превышает 0.95, а в ряде случаев достигает единицы. Существенно, что эти результаты получены при едином фиксированном расписании для всех задач, без подбора параметров под конкретный экземпляр.

Полученные результаты не означают, что запутанность не нужна для квантовой оптимизации вообще. Они говорят о том, что в рассматриваемом режиме значительная часть оптимизационного потенциала QAOA сохраняется и без неё.

Список литературы

[1] E. Farhi, J. Goldstone, S. Gutmann, “A Quantum Approximate Optimization Algorithm”, arXiv: 1411.4028.

[2] G. Scriva, N. Astrakhantsev, S. Pilati, G. Mazzola, “Challenges of variational quantum optimization with measurement shot noise”, *Physical Review A*, **109** (2024), 032408. DOI: 10.1103/PhysRevA.109.032408.

[3] F. G. S. L. Brandao, M. Broughton, E. Farhi, S. Gutmann, H. Neven, “For Fixed Control Parameters the Quantum Approximate Optimization Algorithm’s Objective Function Value Concentrates for Typical Instances”, arXiv: 1812.04170.

[4] A. Yu. Chernyavskiy, D. A. Kulikov, B. I. Bantysh, Yu. I. Bogdanov, A. K. Fedorov, E. O. Kiktenko, “Evidence for effectively constant shot complexity in the quantum approximate optimization algorithm without per-instance optimization”, *Physical Review A*, **114** (2026), 032405. DOI: 10.1103/PhysRevA.114.032405.

[5] B. I. Bantysh, A. Yu. Chernyavskiy, D. A. Kulikov, M. A. Gavreev, E. O. Kiktenko, “Disentangling QAOA: From Weakly Entangled Circuits to a Classical QUBO Solver”, arXiv: 2609.15738 .

Статья поступила 9 октября 2026 г.

On solving binary optimization problems using QAOA

A. Y. Chernyavskiy, B. I. Bantysh, D. A. Kulikov, E. O. Kiktenko

We consider solving QUBO problems using QAOA with fixed parameters and a circuit number of layers that grows linearly with problem size. Numerical results show that, contrary to expectations, the median number of circuit runs required to obtain a solution with a prescribed approximation ratio does not increase with problem size. The analysis of entanglement reveals an unexpected decrease of its peak value with the number of layers. Guided by this observation, we constructed a fully classical quantum-inspired algorithm without entanglement. On GSet MaxCut benchmarks with up to 20,000 variables, the ratio of the found cut to the best known value exceeds 0.95 in the vast majority of cases.

Keywords: QAOA, QUBO, MaxCut, fixed parameters, entanglement.

References

[1] E. Farhi, J. Goldstone, S. Gutmann, "A Quantum Approximate Optimization Algorithm", arXiv: 1411.4028.

[2] G. Scriva, N. Astrakhantsev, S. Pilati, G. Mazzola, "Challenges of variational quantum optimization with measurement shot noise", *Physical Review A*, **109** (2024), 032408. DOI: 10.1103/PhysRevA.109.032408.

[3] F. G. S. L. Brandao, M. Broughton, E. Farhi, S. Gutmann, H. Neven, "For Fixed Control Parameters the Quantum Approximate Optimization Algorithm's Objective Function Value Concentrates for Typical Instances", arXiv: 1812.04170.

[4] A. Yu. Chernyavskiy, D. A. Kulikov, B. I. Bantysh, Yu. I. Bogdanov, A. K. Fedorov, E. O. Kiktenko, "Evidence for effectively constant shot complexity in the quantum approximate optimization algorithm without per-instance optimization", *Physical Review A*, **114** (2026), 032405. DOI: 10.1103/PhysRevA.114.032405.

[5] B. I. Bantysh, A. Yu. Chernyavskiy, D. A. Kulikov, M. A. Gavreev, E. O. Kiktenko, "Disentangling QAOA: From Weakly Entangled Circuits to a Classical QUBO Solver", arXiv: 2609.15738.

Received on October 9, 2026