Остаточная запутанность после локальных проективных измерений

И. А. Чадов*

Исследуется устранение остаточной запутанности локальными проективными измерениями. Для четырёхкубитной GHZ–W-суперпозиции построен адаптивный протокол измерения двух кубитов, оставляющий сепарабельную пару при каждом исходе. Для любых фиксированных локальных базисов доказана положительная нижняя оценка энтропийного индекса робастности.

Ключевые слова: квантовая запутанность, проективные измерения, GHZ, W.

1. Постановка задачи

В работе исследуется влияние ограничений на измерительный протокол для чистой N-кубитной системы. Измеряется набор K из $m = 1, 2$ кубитов; R — остальные $r = N - m \geq 2$ кубитов. Выбор локальных базисов P задаёт ансамбль условных состояний $\{p_\mu, |\psi_\mu\rangle\}$; учитываются все исходы с $p_\mu > 0$. Положим $\rho_A = \mathrm{Tr}_{R\setminus A}|\psi\rangle\langle\psi|$, $\mathcal{A} = \{A \subset R : 1 \leq |A| \leq \lfloor r/2 \rfloor\}$ и

$$F(\psi) = \frac{\sum_{A\in\mathcal{A}} S(\rho_A)}{\sum_{A\in\mathcal{A}} |A|}, \qquad S(\rho) = -\,\mathrm{Tr}\,\rho \log_2 \rho,$$
$$R_S = \binom{N}{m}^{-1} \sum_{|K|=m} \min_P \sum_\mu p_\mu F(\psi_\mu). \tag{1}$$

Минимум берётся по достижимым ансамблям для каждого K, затем усредняется по K. Для сравнения Negativity индекс [2] усредняет по тем же K величину $\mathcal{N}_{\mathrm{loss}}(K) = |\mathcal{A}|^{-1} \sum_A (\|\rho_R^{T_A}\|_1 - 1)/2$, где $\rho_R = \mathrm{Tr}_K|\Psi\rangle\langle\Psi|$, T_A — частичное транспонирование, $\|\cdot\|_1$ — следовая норма.

2. Измерение одного кубита

Объект исследования — семейство $|\Psi_N(\alpha)\rangle = \alpha|\mathrm{GHZ}_N\rangle + \sqrt{1-\alpha^2}|W_N\rangle$, $0 \leq \alpha \leq 1$, где $|\mathrm{GHZ}_N\rangle = (|0^N\rangle + |1^N\rangle)/\sqrt{2}$,

* *Чадов Иван Алексеевич* — аспирант, Национальный исследовательский технологический университет «МИСИС», Москва, Россия; научный руководитель — Чернявский Андрей Юрьевич, e-mail: i.chadov@mail.ru, ORCID: 0009-0000-4347-7333.

Chadov Ivan Alekseevich — PhD student, National University of Science and Technology "MISIS", Moscow, Russia; supervisor: Andrey Yu. Chernyavskiy.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

$|W_N\rangle = N^{-1/2}\sum_{j=1}^{N}|0\ldots1_j\ldots0\rangle$. По перестановочной симметрии все наборы K одного размера эквивалентны. Для $N=3$ минимум средней меры запутанности Concurrence достижим проективным измерением с равными значениями в обеих ветвях [4]. Выпуклость и возрастание функции Вуттерса [1] дают следствие известного результата:

$$R_S = \mathcal{E}(C_3), \quad C_3 = \left|\frac{2(1-\alpha^2)}{3} - \sqrt{\frac{2}{3}}\alpha\sqrt{1-\alpha^2}\right|. \tag{2}$$

Здесь C_3 — Concurrence редукции, $\mathcal{E}(c) = h_2((1+\sqrt{1-c^2})/2)$, $h_2(x) = -x\log_2 x - (1-x)\log_2(1-x)$ — бинарная энтропия Шеннона в битах. Оба индекса равны нулю при $\alpha = \sqrt{2/5}$ и 1; при внутреннем нуле исходное состояние запутанно, а условные пары могут быть сепарабельны. Для $N = 4, 5$ $R_S > 0$ при $\alpha < 1$ [3]: ненулевая W-компонента препятствует полному устранению запутанности одним измерением.

3. Два последовательных измерения

При $N = 4, m = 2$ фиксированный протокол задаёт базисы заранее, адаптивный выбирает второй по первому исходу; допускаются оба порядка измерений. Для максимизации средней Concurrence адаптация не улучшает оптимум локальных проективных измерений [5]. Ниже доказано её строгое преимущество при минимизации.

Бра-векторы u, v задают ненормированную матрицу амплитуд пары:

$$M(u,v) = \begin{pmatrix} au_0v_0 + b(u_0v_1 + u_1v_0) & bu_0v_0 \\ bu_0v_0 & au_1v_1 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где $a = \alpha/\sqrt{2}$, $b = \sqrt{1-\alpha^2}/2$, $p_\mu = \mathrm{Tr}(M_\mu M_\mu^\dagger)$, $C_\mu = 2|\det M_\mu|/p_\mu$; минимизируется $J = \sum_\mu p_\mu \mathcal{E}(C_\mu)$.

Фиксированные базисы. При $\alpha = \alpha_* = 1/\sqrt{3}$ пусть n, m — единичные оси Блоха двух измерений, $D_\mu = \det M_\mu$ и $x = (n_x m_x, (n_x m_z + n_z m_x)/\sqrt{2}, n_y m_y, n_z m_z)^T$. Раскрытие определителей даёт тождество

$$288\sum_\mu |D_\mu|^2 = x^T B x + 6(1-\|x\|^2) + Q,\ B = \begin{pmatrix} 8 & -4\sqrt{2} & -1 & -1 \\ -4\sqrt{2} & 9 & 3\sqrt{2} & 0 \\ -1 & 3\sqrt{2} & 8 & 3 \\ -1 & 0 & 3 & 8 \end{pmatrix},$$

где остаток явно неотрицателен:

$$\begin{aligned} Q = {} & \tfrac{1}{2}(n_x m_z - n_z m_x)^2 + [m_y(n_x+n_z) + n_y(m_x+m_z)]^2 \\ & + m_y^2(n_x-n_z)^2 + n_y^2(m_x-m_z)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Вектор x содержит ортогональные компоненты единичного тензора $n \otimes m$, поэтому $\|x\| \le 1$. По критерию Сильвестра $B - \frac{4}{3} I \succ 0$, откуда $288 \sum_\mu |D_\mu|^2 \ge \frac{4}{3}\|x\|^2 + 6(1 - \|x\|^2) \ge \frac{4}{3}$. Выпуклость и возрастание $\mathcal{E}$ дают

$$J \ge \mathcal{E}\left(2 \sum_\mu |D_\mu|\right) \ge \mathcal{E}\left(\frac{1}{3\sqrt{6}}\right) \approx 0{,}04. \tag{4}$$

Граница для $R_S^{\mathrm{fix}}(\alpha_*)$ охватывает все комплексные базисы.

Адаптивный протокол. При α_* первый базис равен $|\pm\rangle = (|0\rangle \pm |1\rangle)/\sqrt{2}$. После + второй базис задают $q_0 = (c, s)^T$, $q_1 = (-s, c)^T$, где $c = \cos(\pi/8)$, $s = \sin(\pi/8)$. После − используются $y_\pm = (1, \pm i)^T/\sqrt{2}$. По (3) конечные состояния равны $q_0^{\otimes 2}, q_1^{\otimes 2}, y_+^{\otimes 2}, y_-^{\otimes 2}$ с вероятностями $(2 + \sqrt{2})/6, (2 - \sqrt{2})/6, 1/6, 1/6$. Все они сепарабельны, поэтому $R_S^{\mathrm{adapt}}(\alpha_*) = 0$.

Численные оценки. Базис $\{(\sqrt{5}|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{6}, (|0\rangle - \sqrt{5}|1\rangle)/\sqrt{6}\}$ на обоих кубитах даёт $R_S^{\mathrm{fix}}(\alpha_*) \le U \approx 0{,}23$, где U вычисляется по (3). Для рис. 1б использован метод Пауэлла (SciPy): четыре/шесть углов фиксированного/адаптивного протокола, сетка $\{k/999 : k = 0, \ldots, 999\} \cup \{\alpha_*\}$, `xtol`$= 10^{-9}$, `ftol`$= 10^{-11}$. До шести стартов, до 18 каждые 40 узлов и в начале каждого из четырёх блоков; решение переносится внутри блока.

Ось базиса задаётся $n = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$; исходы $0, 1$ соответствуют $\pm n$.

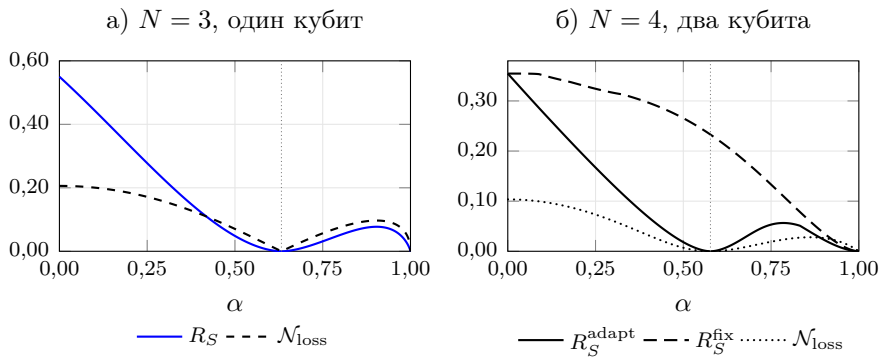


Рис. 1: Энтропийный индекс робастности и Negativity индекс при измерении: а) одного кубита ($N = 3$); б) двух кубитов ($N = 4$), фиксированный и адаптивный протоколы.

Список литературы

[1] W. K. Wootters, “Entanglement of Formation of an Arbitrary State of Two Qubits”, *Phys. Rev. Lett.*, **80**:10 (1998), 2245–2248. DOI: 10.1103/PhysRevLett.80.2245.

[2] G. Vidal, R. F. Werner, “Computable measure of entanglement”, *Phys. Rev. A*, **65**:3 (2002), 032314. DOI: 10.1103/PhysRevA.65.032314.

[3] A. Neven, J. Martin, T. Bastin, “Entanglement robustness against particle loss in multiqubit systems”, *Phys. Rev. A*, **98**:6 (2018), 062335. DOI: 10.1103/PhysRevA.98.062335.

[4] L. Roa, A. Muñoz, C. Muñoz, A. B. Klimov, “Deterministic entanglement extraction”, *Phys. Rev. A*, **99**:5 (2019), 052344. DOI: 10.1103/PhysRevA.99.052344.

[5] T. Laustsen, F. Verstraete, S. J. van Enk, “Local vs. Joint Measurements for the Entanglement of Assistance”, *Quantum Inf. Comput.*, **3**:1 (2003), 64–83. DOI: 10.26421/QIC3.1-6 .

Статья поступила 24 октября 2026 г.

Residual entanglement after local projective measurements

I. A. Chadov

For a four-qubit GHZ–W superposition, adaptive local projective measurements of two qubits yield a separable pair for every outcome. For all fixed local bases, we prove a strictly positive lower bound on its entropic robustness index.

Keywords: quantum entanglement, projective measurements, GHZ, W.

Received on October 24, 2026