Подквазигруппы случайных m-арных квазигрупп

Л. В. Гайваль*

Для равномерно случайной помеченной m-арной квазигруппы порядка n при фиксированном $m \geq 2$ доказаны пуассоновский предел Pois(1) числа всех собственных подквазигрупп и оценка $O(n^{-1})$ вероятности существования собственной подквазигруппы размера не менее двух. Доля квазигрупп без собственных подквазигрупп стремится к e^{-1} при $n \to \infty$.

Ключевые слова: m-квазигруппа, подквазигруппа, латинский квадрат, распределение Пуассона.

1. Введение

В последние годы существует интерес к свойствам квазигрупп и латинских квадратов. Вопросы поиска подквазигрупп рассматривались, в частности, в [1], а в [2] изучена задача о латинских подквадратах случайных латинских квадратов. В настоящей работе исследуется асимптотика числа собственных подквазигрупп в равномерно случайной помеченной m-арной квазигруппе при росте её порядка.

Пусть $m, n \geq 2$ — целые числа, $[n] = \{1, \ldots, n\}$. Помеченная m-арная квазигруппа задаётся операцией $F : [n]^m \to [n]$, если уравнение $F(x_1, \ldots, x_m) = y$ однозначно разрешимо по каждой переменной при заданных остальных. Непустое $S \subseteq [n]$ называется собственной *подквазигруппой*, если $F(S^m) \subseteq S$ и $S \neq [n]$.

Выбираем F равномерно среди всех помеченных m-арных квазигрупп на $[n]$. Через X_k обозначим число собственных подквазигрупп размера k.

2. Подквазигруппы размера не менее двух

Для фиксированного $a \in [n]$ срез $L_a(x, y) = F(x, y, a, \ldots, a)$ является латинским квадратом (при $m = 2$ полагаем $L_a = F$). Его распределение инвариантно относительно независимых перестановок строк и столбцов,

* *Гайваль Леонид Валерьевич* — студент магистратуры кафедры теории вероятностей механико-математического факультета МГУ, e-mail: leonid.gaival@math.msu.ru, ORCID: 0009-0003-6664-8993.

Gaival Leonid Valerievich — Master's student, Department of Probability Theory, Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

так как перестановки меток первых двух аргументов биективно преобразуют множество операций и сохраняют равномерное распределение. Если S — подквазигруппа и $a \in S$, то $L_a(S,S) \subseteq S$.

Лемма 1. *Размер k собственной подквазигруппы квазигруппы порядка n удовлетворяет $k \le n/2$.*

Доказательство. Пусть S — собственная подквазигруппа размера k, $a \in S$. Тогда S является собственной подквазигруппой бинарной квазигруппы L_a порядка n. По [3, теорема 1], $k \le n/2$. □

Лемма 2. *Пусть распределение латинского квадрата L инвариантно относительно независимых перестановок строк и столбцов. Для фиксированных $A, R, C \subseteq [n]$ размера $k \ge 1$*

$$\mathbb{P}\big(L(R,C) \subseteq A\big) \le \frac{n}{k\binom{n}{k}^2}.$$

Доказательство. В двудольном графе $G_A(L)$ вершины соответствуют строкам и столбцам, а ребро (r,c) присутствует при $L(r,c) \in A$. Граф k-регулярен. Поэтому условие $L(R,C) \subseteq A$ равносильно тому, что R, C образуют компоненту $K_{k,k}$: все степени этих вершин исчерпываются внутренними рёбрами. Число таких компонент $Z_A(L)$ не превосходит n/k. По инвариантности вероятность одинакова для всех пар (R,C), по линейности математического ожидания получаем

$$\binom{n}{k}^2 \mathbb{P}\big(L(R,C) \subseteq A\big) = \mathbb{E}Z_A(L) \le n/k. \qquad \square$$

Теорема 1. *При $n \to \infty$*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{k=2}^{\lfloor n/2 \rfloor} X_k\right] = O(n^{-1}), \qquad \mathbb{P}\left(\sum_{k=2}^{\lfloor n/2 \rfloor} X_k > 0\right) = O(n^{-1}).$$

Доказательство. Зафиксируем S размера k и $a \in S$. Замкнутость S влечёт $L_a(S,S) \subseteq S$. По лемме 2 вероятность этого события не превосходит $n/(k\binom{n}{k}^2)$. Суммирование по S даёт $\mathbb{E}X_k \le n/(k\binom{n}{k}) = 1/\binom{n-1}{k-1}$. При $n \ge 6$, поскольку $\binom{n-1}{k-1} \ge \binom{n-1}{2}$ для $3 \le k \le \lfloor n/2 \rfloor$, имеем

$$\mathbb{E}\left[\sum_{k=2}^{\lfloor n/2 \rfloor} X_k\right] \le \frac{1}{n-1} + \frac{\lfloor n/2 \rfloor - 2}{\binom{n-1}{2}} \le \frac{2}{n-1}.$$

Оценка вероятности следует из неравенства Маркова. □

3. Одноэлементные подквазигруппы

Положим $Y_i = F(i, \dots, i)$, тогда $X_1 = \#\{i : Y_i = i\}$. Обозначим $(x)_r = x(x-1)\cdots(x-r+1)$, $(x)_0 = 1$.

Лемма 3. *Для фиксированного $r \geq 1$ и различных $i_1, \dots, i_r \in [n]$ при $n \to \infty$ имеем $\mathbb{P}(Y_{i_j} = i_j,\ j = 1, \dots, r) = (1 + o(1))n^{-r}$.*

Доказательство. Пусть $i \neq j$ и π — равномерная случайная перестановка, независимая от F. Перестановка меток первого аргумента сохраняет распределение F, поэтому

$$\mathbb{P}(Y_i = Y_j) = \mathbb{P}\big(F(\pi(i), i, \dots, i) = F(\pi(j), j, \dots, j)\big).$$

Зафиксируем F и $\pi(i) = b$. Тогда $\pi(j)$ равномерно распределено на $[n]\setminus\{b\}$, а уравнение $F(c, j, \dots, j) = F(b, i, \dots, i)$ имеет единственное решение c. Условная вероятность совпадения не превосходит $1/(n-1)$. Усредняя по F и b, получаем $\mathbb{P}(Y_i = Y_j) \leq 1/(n-1)$.

Пусть D — событие попарной различности $Y_{i_1}, \dots, Y_{i_r}$. По неравенству объединения $1 - \binom{r}{2}/(n-1) \leq \mathbb{P}(D) \leq 1$. Перестановки выходных значений сохраняют распределение F и событие D, поэтому все $(n)_r$ упорядоченных наборов различных значений равновероятны. В частности, при фиксированном r,

$$\mathbb{P}(Y_{i_1} = i_1, \dots, Y_{i_r} = i_r) = \frac{\mathbb{P}(D)}{(n)_r} = \frac{1 + O_r(n^{-1})}{n^r} = \frac{1 + o(1)}{n^r}. \qquad (1)$$

□

Теорема 2. *При $n \to \infty$ имеем $X_1 \xrightarrow{d} \mathrm{Pois}(1)$.*

Доказательство. Суммируя (1) по упорядоченным наборам различных индексов, для $1 \leq r \leq n$ получаем

$$0 \leq \mathbb{E}(X_1)_r \leq 1, \qquad \mathbb{E}(X_1)_r \geq 1 - \frac{\binom{r}{2}}{n-1}. \qquad (2)$$

При каждом фиксированном r имеем $\mathbb{E}(X_1)_r \to 1$. Метод факториальных моментов [4] даёт $X_1 \xrightarrow{d} \mathrm{Pois}(1)$. □

Следствие 1. *Пусть $N_n = \sum_{k=1}^{n-1} X_k$ — число всех собственных подквазигрупп. Для любого фиксированного $m \geq 2$ при $n \to \infty$ имеем $N_n \xrightarrow{d} \mathrm{Pois}(1)$. В частности, доля помеченных m-арных квазигрупп порядка n без собственных подквазигрупп стремится к e^{-1}.*

Доказательство. По лемме 1 и теореме 1, $\mathbb{P}(N_n \neq X_1) = O(n^{-1})$. Следовательно, по теореме 2, $N_n \xrightarrow{d} \mathrm{Pois}(1)$, откуда $\mathbb{P}(N_n = 0) \to e^{-1}$. □

Список литературы

[1] А. В. Галатенко, А. Е. Панкратьев, В. М. Староверов, "Об одном алгоритме проверки существования подквазигрупп", *Чебышевский сб.*, **22**:2 (2021), 76–89. DOI: 10.22405/2226-8383-2021-22-2-76-89.

[2] J. Allsop, I. M. Wanless, "Subsquares in Random Latin Rectangles", *Combinatorica*, **45** (2025), 29. DOI: 10.1007/s00493-025-00156-0.

[3] D. W. Wall, "Sub-quasigroups of finite quasigroups", *Pacific J. Math.*, **7**:4 (1957), 1711–1714. DOI: 10.2140/pjm.1957.7.1711.

[4] A. Frieze, M. Karoński, *Introduction to Random Graphs*, Cambridge University Press, Cambridge, 2015. DOI: 10.1017/CBO9781316339831 .

Статья поступила 9 ноября 2026 г.

Subquasigroups of random m-ary quasigroups

L. V. Gaival

For fixed $m \geq 2$, we prove that in a uniformly random labelled m-ary quasigroup of order n, the total number of proper subquasigroups converges in distribution to Pois(1) as $n \to \infty$. The probability of the existence of a proper subquasigroup of order at least two is $O(n^{-1})$, and the probability of having no proper subquasigroups tends to e^{-1}.

Keywords: m-quasigroup, subquasigroup, Latin square, Poisson distribution.

References

[1] A. V. Galatenko, A. E. Pankratiev, V. M. Staroverov, "An algorithm for checking the existence of subquasigroups", *Chebyshevskii Sbornik*, **22**:2 (2021), 76–89. DOI: 10.22405/2226-8383-2021-22-2-76-89 (In Russian).

[2] J. Allsop, I. M. Wanless, "Subsquares in Random Latin Rectangles", *Combinatorica*, **45** (2025), 29. DOI: 10.1007/s00493-025-00156-0.

[3] D. W. Wall, "Sub-quasigroups of finite quasigroups", *Pacific J. Math.*, **7**:4 (1957), 1711–1714. DOI: 10.2140/pjm.1957.7.1711.

[4] A. Frieze, M. Karoński, *Introduction to Random Graphs*, Cambridge University Press, Cambridge, 2015. DOI: 10.1017/CBO9781316339831.

Received on November 9, 2026