Математическая модель боя с применением расходуемых FPV-дронов

Д. М. Шлапаков*

Предлагается модификация квадратичного закона Осипова–Ланчестера для двух группировок, включающих пехоту и расходуемые FPV-дроны. Расход дронов описывается отдельным уравнением, что замыкает модель. Получено общее интегральное уравнение состояния с произвольным профилем применения дронов. Для предварительного массированного удара и пропорциональной огневой поддержки выведены аналитические условия победы.

Ключевые слова: уравнения Осипова–Ланчестера, математическое моделирование боя, FPV-дроны, беспилотные летательные аппараты, дифференциальные уравнения.

1. Постановка задачи

Классический квадратичный закон Осипова–Ланчестера описывает прицельный огонь двух группировок и предполагает постоянное и непрерывное поражение боевых единиц противника. Для FPV-дронов-камикадзе это предположение нарушается: успешная атака сопровождается расходом самого дрона. Цель работы – модифицировать квадратичный закон для боя двух гетерогенных группировок, включающих пехоту и расходуемые FPV-дроны.

Для однородных группировок $A(t)$ и $B(t)$ классическая модель Осипова–Ланчестера и вытекающее из неё уравнение состояния имеют вид

$$\frac{dA}{dt} = -\beta B(t), \quad \frac{dB}{dt} = -\alpha A(t) \implies \alpha(A_0^2 - A^2) = \beta(B_0^2 - B^2), \quad (1)$$

где α и β – темпы уничтожения противника одной боевой единицей в единицу времени для группировок $A(t)$ и $B(t)$ соответственно. В работе используются классические модели Осипова и Ланчестера и исследования переменных коэффициентов моделей Ланчестера [1, 2, 4]; общие вопросы дифференциальных моделей боя рассматриваются в [3, 5].

* *Шлапаков Данила Михайлович* — студент каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: `danila.shlapakov@math.msu.ru`.

Shlapakov Danila Mikhailovich — Student, Department of Mathematical Theory of Intelligent Systems, Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

2. Модифицированная модель

Пусть $I_1(t), I_2(t)$ – численность пехоты, $D_1(t), D_2(t)$ – число FPV-дронов, а $u_1(t), u_2(t) \geq 0$ – доли запаса дронов, расходуемые в единицу времени. Коэффициенты α_{II}, β_{II} характеризуют эффективность пехоты в поражении пехоты противника. Параметры k_1, k_2 задают математическое ожидание числа поражённых военнослужащих одним дроном с учётом попадания, осечки и перехвата. Дроны применяются только против пехоты противника; взаимодействие "дрон–дрон" не моделируется, а потери дронов от средств противодействия учтены в k_1, k_2, поэтому запас убывает лишь вследствие применения:

$$\frac{dD_1}{dt} = -u_1(t)D_1(t), \qquad \frac{dD_2}{dt} = -u_2(t)D_2(t). \tag{2}$$

Отсюда $\int_0^t u_i D_i \, d\tau = D_i(0) - D_i(t) \leq D_i(0)$: дроны i-й стороны поражают в среднем не более $k_i D_i(0)$ военнослужащих. Динамика пехоты описывается системой

$$\begin{cases} \dfrac{dI_1}{dt} = -\beta_{II} I_2(t) - k_2 u_2(t) D_2(t), \\ \dfrac{dI_2}{dt} = -\alpha_{II} I_1(t) - k_1 u_1(t) D_1(t), \end{cases} \tag{3}$$

которая вместе с (2) при заданных $u_i(t)$ определяет $I_i(t)$ и $D_i(t)$ по начальным значениям. Умножая уравнения (3) на $\alpha_{II} I_1(t)$ и $\beta_{II} I_2(t)$ соответственно, вычитая и интегрируя от 0 до t_k (t_k – момент окончания боя, т.е. обращения в нуль численности пехоты одной из сторон), получаем общее уравнение состояния

$$\begin{aligned} &\frac{\alpha_{II}}{2}[I_1^2(t_k) - I_1^2(0)] - \frac{\beta_{II}}{2}[I_2^2(t_k) - I_2^2(0)] \\ &= \int_0^{t_k} [\beta_{II} I_2(\tau) k_1 u_1(\tau) D_1(\tau) - \alpha_{II} I_1(\tau) k_2 u_2(\tau) D_2(\tau)] d\tau. \end{aligned} \tag{4}$$

3. Аналитические условия для двух тактик

Массированный удар. Пусть все дроны применяются до начала стрелкового контакта: $D_i(t) = 0$ при $t > 0$, и правая часть (4) на фазе стрелкового боя равна нулю. Дроны не могут поразить больше военнослужащих, чем имеется в наличии, поэтому эффективные численности равны $I_1^{\text{eff}} = \max\{0, I_1(0) - k_2 D_2(0)\}$ и $I_2^{\text{eff}} = \max\{0, I_2(0) - k_1 D_1(0)\}$. Из (1) условие полной победы первой стороны принимает вид

$$\alpha_{II}\big(I_1^{\text{eff}}\big)^2 > \beta_{II}\big(I_2^{\text{eff}}\big)^2. \tag{5}$$

При $k_2 D_2(0) \le I_1(0)$ и $k_1 D_1(0) \le I_2(0)$ максимумы можно опустить. Если же $k_2 D_2(0) > I_1(0)$, то $I_1^{\text{eff}} = 0$, пехота первой стороны уничтожена до контакта, и условие (5) не выполняется (побеждает вторая сторона либо обе теряют пехоту).

Пропорциональная поддержка. Пусть $k_1 u_1(t) D_1(t) = \gamma_1 I_1(t)$, $k_2 u_2(t) D_2(t) = \gamma_2 I_2(t)$, $\gamma_i \ge 0$. Из (2) следует $D_i(t) = D_i(0) - \frac{\gamma_i}{k_i} \int_0^t I_i \, d\tau$, поэтому дальнейшие соотношения справедливы, лишь пока запас не исчерпан:

$$\gamma_i \int_0^{t_k} I_i(\tau) \, d\tau \le k_i D_i(0), \qquad i = 1, 2. \tag{6}$$

При выполнении (6) система (3) сводится к

$$\frac{dI_1}{dt} = -(\beta_{II} + \gamma_2) I_2(t), \qquad \frac{dI_2}{dt} = -(\alpha_{II} + \gamma_1) I_1(t), \tag{7}$$

и условие победы первой стороны имеет вид

$$(\alpha_{II} + \gamma_1) I_1^2(0) > (\beta_{II} + \gamma_2) I_2^2(0). \tag{8}$$

Заключение. Уравнение расхода (2) замыкает модель и ограничивает эффект дронов начальным запасом $D_i(0)$. При одном и том же запасе исход боя зависит от профиля $u_i(t)$: при массированном ударе дроны изменяют начальные численности в квадратичном законе, а при распределённом применении их вклад проявляется как добавка к коэффициентам эффективности. Модель может быть расширена введением стохастических факторов и влияния рельефа местности.

Список литературы

[1] М. П. Осипов, “Влияние численности сражающихся сторон на их потери”, *Военный сборник*, 1915, № 9, 25–37.

[2] F. W. Lanchester, *Aircraft in Warfare, the Dawn of the Fourth Arm*, Constable and Company Limited, London, 1916, 222 pp.

[3] A. Washburn, *Lanchester Systems*, Naval Postgraduate School, Monterey, California, 2000, 24 pp.

[4] G. Taylor, *A Mathematical Theory for Variable Coefficient Lanchester-Type Equations of Modern Warfare*, Naval Postgraduate School, Monterey, California, 1974, 39 pp.

[5] G. Isac, A. Gosselin, *Viability Theory and Differential Lanchester Type Models for Combat Differential Systems*, Department of Mathematics, Royal Military College of Canada, Kingston, Ontario, Canada, 2004, 33 pp.

Статья поступила 29 сентября 2026 г.

A Mathematical Model of Combat with Expendable FPV Drones

D. M. Shlapakov

A modification of the quadratic Osipov–Lanchester law for forces including infantry and expendable FPV drones is proposed. Drone expenditure is described by a separate equation, which closes the model. A general integral state equation with an arbitrary drone employment profile is derived. Analytical victory conditions are obtained for a preliminary massed strike and proportional fire support.

Keywords: Osipov–Lanchester equations, combat modeling, FPV drones, unmanned aerial vehicles, differential equations.

References

[1] M. P. Osipov, "Vliyanie chislennosti srazhayushchikhsya storon na ikh poteri", *Voennyi sbornik*, 1915, № 9, 25–37 (In Russian).

[2] F. W. Lanchester, *Aircraft in Warfare, the Dawn of the Fourth Arm*, Constable and Company Limited, London, 1916, 222 pp.

[3] A. Washburn, *Lanchester Systems*, Naval Postgraduate School, Monterey, California, 2000, 24 pp.

[4] G. Taylor, *A Mathematical Theory for Variable Coefficient Lanchester-Type Equations of Modern Warfare*, Naval Postgraduate School, Monterey, California, 1974, 39 pp.

[5] G. Isac, A. Gosselin, *Viability Theory and Differential Lanchester Type Models for Combat Differential Systems*, Department of Mathematics, Royal Military College of Canada, Kingston, Ontario, Canada, 2004, 33 pp.

Received on September 29, 2026