# О единичных проверяющих тестах для формул в некоторых базисах при константных неисправностях на выходах функциональных элементов

Чж. Цуй*, Д. С. Романов†

В работе исследуется длина единичного проверяющего теста при константных неисправностях на выходах элементов в булевых формулах. Для трёх базисов, близких к стандартному, установлена асимптотическая верхняя оценка функции Шеннона. Для базисов «стрелка Пирса» и «штрих Шеффера» получены растущая нижняя оценка этой функции, а также выраженная через ранг формулы верхняя оценка длины минимального теста. Показано, что не всякая булева функция допускает неизбыточную реализацию над последними двумя базисами.

**Ключевые слова:** проверяющий тест, константные неисправности, булева формула.

## 1. Введение и основные результаты

Булева формула может быть представлена как схема из функциональных элементов (СФЭ) с одним выходом без ветвлений на выходах функциональных элементов (ФЭ). Будем в любой базис неявно включать тождественную функцию, понимая под этим лишь возможность пустой формулы (непосредственного соединения входа с выходом). Отдельные ФЭ, реализующие тождественную функцию, не рассматриваются и неисправностям не подвергаются.

Константная неисправность на выходе ФЭ есть результат замены исходного ФЭ на функциональный элемент, реализующий константу. Через $O_1^{\mathrm{c}}$ ($IO_1^{\mathrm{c}}$) обозначается источник одиночных произвольных константных неисправностей на выходах ФЭ (соответственно, источник одиночных

*Цуй Чжэнюй* — аспирант факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, e-mail: ourobros1234@gmail.com.

*Cui Zhenyu* — Postgraduate student, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Lomonosov Moscow State University.

†*Романов Дмитрий Сергеевич* — профессор факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, e-mail: romanov@cs.msu.ru.

*Romanov Dmitrii Sergeevich* — Professor, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Lomonosov Moscow State University.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

произвольных константных неисправностей на входах и выходах ФЭ). Множество $T$ входных наборов формулы $S$, реализующей функцию $f$, является *проверяющим тестом* относительно $O_1^{\mathrm{c}}$, если для любой полученной при такой неисправности формулы, реализующей функцию $g \neq f$, в $T$ найдётся набор $\widetilde{\alpha}$ такой, что $f(\widetilde{\alpha}) \neq g(\widetilde{\alpha})$. Число наборов в тесте называется его *длиной*. Длину минимального теста обозначим через $L^{\mathrm{dt}}(O_1^{\mathrm{c}}, S)$. Формула считается *неизбыточной*, если при любой одиночной нетривиальной поломке ФЭ полученная формула реализует функцию, не равную исходной. Поломка нетривиальна, если она меняет значение на выходе соответствующего ФЭ хотя бы на одном входном наборе. Через $L^{\mathrm{dt}}_{\mathrm{F},B}(O_1^{\mathrm{c}}, f)$ обозначим минимум величин $L^{\mathrm{dt}}(O_1^{\mathrm{c}}, S)$ по всем неизбыточным формулам $S$ над базисом $B$, реализующим $f$. Если таких формул нет, полагаем эту величину равной нулю. *Функцией Шеннона* длины проверяющего теста называется величина $L^{\mathrm{dt}}_{\mathrm{F},B}(O_1^{\mathrm{c}}, n) = \max\limits_{f \in P_2(n)} L^{\mathrm{dt}}_{\mathrm{F},B}(O_1^{\mathrm{c}}, f)$, где $P_2(n)$ — множество булевых функций от $n$ переменных. Аналогичная величина для СФЭ обозначается через $L^{\mathrm{dt}}_{\mathrm{C},B}(O_1^{\mathrm{c}}, n)$.

В [1] фактически доказано, что в базисе $B_1 = \{x \,\&\, y,\ x \oplus y,\ 1\}$ любую булеву функцию $n$ переменных можно смоделировать формулой с одним дополнительным аргументом, допускающей универсальный (т.е. не зависящий от булевой функции) единичный проверяющий тест длины не более $n + 4$ относительно $IO_1^{\mathrm{c}}$. В [2] установлено, что $2 \leqslant L^{\mathrm{dt}}_{\mathrm{C},B}(O_1^{\mathrm{c}}, n) \leqslant 4$ для произвольного конечного полного (в $P_2$) базиса $B$. В [3, 4] доказано, в частности, что $L^{\mathrm{dt}}_{\mathrm{C},\{xy,\, x\oplus y,\, 1,\, 0\}}(O_1^{\mathrm{c}}, n) = 3$. В работах [5, 6] установлены точные (равные трем, начиная с некоторого $n$) значения $L^{\mathrm{dt}}_{\mathrm{F},\hat{B}}(O_1^{\mathrm{c}}, n)$ над неизбыточными полными базисами $\hat{B}$ (из элементов с не более чем двумя входами), содержащими $x \oplus y$ или $x \sim y$. В работе [7] установлены нижние оценки $L^{\mathrm{dt}}_{\mathrm{F},B}(O_1^{\mathrm{c}}, n) \geq n(1 + o(1))$ для базисов $B \in \{\{x\&y,\ x \vee y,\ \bar{x}\}, \{x\&y, \bar{x}\}, \{x \vee y, \bar{x}\}, \{x\&\bar{y}, \bar{x}\}, \{x \vee \bar{y}, \bar{x}\}\}$.

Положим $B_0 = \{x \,\&\, y, x \vee y, \bar{x}\}$, $B_{0,1} = \{x \,\&\, \bar{y}, \bar{x}\}$, $B^*_{0,1} = \{x \vee \bar{y}, \bar{x}\}$, $B_2 = \{x \downarrow y\}$, $B^*_2 = \{x \,|\, y\}$. *Рангом* формулы называется число вхождений переменных в эту формулу. Имеют место следующие утверждения.

**Теорема 1.** *Для любого базиса $B$, $B \in \{B_0, B_{0,1}, B^*_{0,1}\}$, при $n \to \infty$ для любой булевой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ имеет место следующая асимптотическая верхняя оценка:*

$$L^{\mathrm{dt}}_{\mathrm{F},B}(O_1^{\mathrm{c}}, f) \leqslant 32 \cdot \frac{2^n}{n} \cdot (1 + o(1)).$$

**Теорема 2.** *Над базисами $B_2$ и $B^*_2$ не существует неизбыточных формул, реализующих константы 0 и 1. Для любого натурального $n \geqslant 2$*

*над базисом $B_2$ не существует неизбыточной формулы от переменных $x_1, \ldots, x_n$, реализующей элементарную дизъюнкцию $x_1^{\sigma_1} \vee \cdots \vee x_n^{\sigma_n}$, а над базисом $B_2^*$ не существует неизбыточной формулы от переменных $x_1, \ldots, x_n$, реализующей элементарную конъюнкцию $x_1^{\sigma_1} \,\&\, \cdots \,\&\, x_n^{\sigma_n}$, где $\sigma_i \in \{0, 1\}$, $i = 1, \ldots, n$.*

**Теорема 3.** *Для любого базиса $B$ из множества $\{B_2, B_2^*\}$ при $n \geqslant 25$ имеет место следующая нижняя оценка:*

$$L^{\mathrm{dt}}_{\mathrm{F},B}(O_1^{\mathrm{c}}, n) \geqslant \lfloor \log_2 n - \log_2 6 \rfloor .$$

**Теорема 4.** *Для любой неизбыточной формулы $S$ над базисом $B_2$ или $B_2^*$, имеющей ранг $p$, длина минимального единичного проверяющего теста относительно константных неисправностей на выходах элементов формулы $S$ не превосходит $p$.*

Исследование выполнено в рамках государственного задания МГУ имени М. В. Ломоносова.

## Список литературы

[1] S. M. Reddy, “Easily testable realization for logic functions”, *IEEE Trans. Comput.*, **C-21**:11 (1972), 1183–1188. DOI: 10.1109/T-C.1972.223475.

[2] Д. С. Романов, “Метод синтеза легкотестируемых схем, допускающих единичные проверяющие тесты константной длины”, *Дискр. матем.*, **26**:2 (2014), 100–130. DOI: 10.4213/dm1283.

[3] К. А. Попков, “Короткие единичные тесты для схем в базисе Жегалкина при произвольных константных неисправностях элементов”, *Матем. заметки*, **117**:5 (2025), 736–749. DOI: 10.4213/mzm14492.

[4] Ю. В. Бородина, К. А. Попков, “Легкотестируемые схемы в базисе Жегалкина при произвольных константных неисправностях на выходах элементов”, *Матем. заметки*, **119**:3 (2026), 352–359. DOI: 10.4213/mzm14729.

[5] Чжэнюй Цуй, Д. С. Романов, “О единичных проверяющих тестах при константных неисправностях на выходах элементов для формул над одним базисом жегалкинского типа”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **89**:6 (2025), 206–218. DOI: 10.4213/im9667.

[6] Чжэнюй Цуй, Д. С. Романов, “О единичных проверяющих тестах при константных неисправностях на выходах элементов в формулах над некоторыми базисами”, *Математические труды*, **29**:1 (2026), 119–141. DOI: 10.25205/1560-750x-2026-29-1-119-141.

[7] Ч. Цуй, Д. С. Романов, “О растущей нижней оценке функции Шеннона длины единичного проверяющего теста при константных неисправностях на выходах элементов в формулах над базисами, близкими к стандартному”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **29**:2 (2025), 162–172.

Статья поступила 23 октября 2026 г.

**On single fault detection tests for formulas over certain bases with respect to stuck-at faults at gate outputs**

Zh. Cui, D. S. Romanov

The cardinality of a single fault detection test set with respect to stuck-at faults at gate outputs is studied for Boolean formulas. An asymptotic upper bound for the corresponding Shannon function is established for three bases close to the standard one. For the "Peirce arrow" and "Sheffer stroke" bases, a growing lower bound for this function is obtained, as well as an upper bound (expressed in terms of the formula's rank) on minimal test set cardinality. Not every Boolean function admits an irredundant formula over the latter two bases.

**Keywords:** fault detection test set, stuck-at faults, Boolean formula.

# References

[1] S. M. Reddy, "Easily testable realization for logic functions", *IEEE Trans. Comput.*, **C-21**:11 (1972), 1183–1188. DOI: 10.1109/T-C.1972.223475.

[2] D. S. Romanov, "Method of synthesis of easily testable circuits admitting single fault detection tests of constant length", *Diskretnaya Matematika*, **26**:2 (2014), 100–130. DOI: 10.4213/dm1283 (in Russian).

[3] K. A. Popkov, "Short single-fault tests for circuits in the Zhegalkin basis with arbitrary stuck-at faults of gates", *Math Notes*, **117**:5–6 (2025), 826–836.

[4] Y. V. Borodina, K. A. Popkov, "Easy-to-test circuits in the Zhegalkin basis with arbitrary stuck-at faults of gate outputs", *Math Notes*, **119**:3–4 (2026), 416–421. DOI: 10.1134/s0001434626601905.

[5] Zhenyu Cui, D. S. Romanov, "Single fault detection test sets with respect to stuck-at faults at the outputs of gates in formulas over one basis of Zhegalkin type", *Izv. Math.*, **89**:6 (2025), 1281–1291. DOI: 10.4213/im9667e.

[6] Zhenyu Cui, D. S. Romanov, "Single fault detection test sets with respect to stuck-at faults at the outputs of gates in formulas over some bases", *Matematicheskie Trudy*, **29**:1 (2026), 119–141 (in Russian. DOI: 10.25205/1560-750x-2026-29-1-119-141).

[7] Zhenyu Cui, D. S. Romanov, "The growing lower bound for the Shannon function of the detection test set cardinality with respect to single stuck-at faults at the outputs of gates in formulas over bases close to the standard one", *Intellektual'nyye Sistemy. Teoriya i Prilozheniya*, **29**:2 (2025), 162–172 (in Russian).

Received on October 23, 2026