О минимальных единичных проверяющих тестах размыкания для контактных схем с дополнительными полюсами

К. А. Попков*

Рассматривается задача синтеза многополюсных неизбыточных контактных схем, реализующих заданные булевы функции между полюсами A и B и допускающих короткие единичные проверяющие тесты относительно размыканий контактов. Для каждой булевой функции и каждого тестового полюсного множества $\mathcal{P}$ найдено минимально возможное значение длины такого теста. В частности, доказано, что оно не превосходит 3, если $\mathcal{P} \neq \{\{A, B\}\}$.

Ключевые слова: контактная схема, обрыв контакта, дополнительный полюс, единичный проверяющий тест, булева функция.

В работе рассматривается задача синтеза легкотестируемых контактных схем [1], реализующих заданные булевы функции. Логический подход к тестированию двухполюсных контактных схем предложен С. В. Яблонским и И. А. Чегис в [2]; опишем одно из возможных обобщений данного подхода на случай схем с дополнительными полюсами.

Пусть зафиксированы $d \in \mathbb{N}$ и некоторое непустое множество $\mathcal{P}$ неупорядоченных пар полюсов из множества $\{A, B, V_1, \ldots, V_d\}$, обладающее тем свойством, что никакая пара из $\mathcal{P}$ не может состоять из двух полюсов с одним и тем же обозначением (например, $\{A, A\}$). Назовём $\mathcal{P}$ *тестовым полюсным множеством* и занумеруем произвольным образом его элементы различными натуральными числами от 1 до p, где $p = |\mathcal{P}|$; очевидно, что $1 \leqslant p \leqslant \frac{(d+2)(d+1)}{2}$. Рассмотрим произвольную $(d+2)$-полюсную контактную схему S с полюсами $A, B, V_1, \ldots, V_d$; при этом из рассмотрения не исключаем случай, когда некоторые из полюсов $A, B, V_1, \ldots, V_d$ в схеме S совпадают. Пусть данная схема для каждого $i \in \{1, \ldots, p\}$ реализует между i-й парой своих полюсов булеву функцию $f_i(\tilde{x}^n)$. Будем предполагать, что под воздействием некоторого источника неисправностей в схеме S может произойти обрыв (размыкание) произвольного одного контакта. При указанной неисправности проводимость между концами

Попков Кирилл Андреевич — докт. физ.-мат. наук, вед. науч. сотр. сектора теоретической кибернетики Института прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, e-mail: kirill-formulist@mail.ru, ORCID: 0000-0003-3763-4050.

Popkov Kirill Andreevich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Leading Researcher, Keldysh Institute of Applied Mathematics, Sector of Theoretical Cybernetics.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

этого контакта становится тождественно нулевой, а схема S для каждого $i \in \{1, \ldots, p\}$ начинает реализовывать между i-й парой своих полюсов некоторую булеву функцию $g_i(\tilde{x}^n)$, вообще говоря, отличную от $f_i(\tilde{x}^n)$. Все такие наборы $(g_1(\tilde{x}^n), \ldots, g_p(\tilde{x}^n))$ назовём *наборами функций неисправности* схемы S. *Единичным проверяющим тестом* для схемы S назовём такое множество T наборов значений булевых переменных $x_1, \ldots, x_n$, что для любого нетривиального, т.е. отличного от $(f_1(\tilde{x}^n), \ldots, f_p(\tilde{x}^n))$, набора функций неисправности $(g_1(\tilde{x}^n), \ldots, g_p(\tilde{x}^n))$ схемы S в T найдётся набор $\tilde{\sigma}$, на котором $(f_1(\tilde{\sigma}), \ldots, f_p(\tilde{\sigma})) \neq (g_1(\tilde{\sigma}), \ldots, g_p(\tilde{\sigma}))$. Будем рассматривать единичные проверяющие тесты (ЕПТ) только для *неизбыточных схем*, в которых обрыв любого одного контакта приводит к нетривиальному набору функций неисправности.

Легко видеть, что определение ЕПТ не зависит от того, в каком порядке элементы множества $\mathcal{P}$ занумерованы числами от 1 до p.

Пусть T — ЕПТ для некоторой $(d+2)$-полюсной контактной схемы S с полюсами $A, B, V_1, \ldots, V_d$ и заданным тестовым полюсным множеством $\mathcal{P}$. Введём следующие обозначения: $D_{d,\mathcal{P}}(T)$ — длина теста T; $D_{d,\mathcal{P}}(S) = \min D_{d,\mathcal{P}}(T)$, где минимум берётся по всем ЕПТ T для схемы S; $D_{d,\mathcal{P}}(f) = \min D_{d,\mathcal{P}}(S)$, где минимум берётся по всем неизбыточным $(d+2)$-полюсным контактным схемам S с полюсами $A, B, V_1, \ldots, V_d$, реализующим между полюсами A и B функцию f; $D_{d,\mathcal{P}}(n) = \max D_{d,\mathcal{P}}(f)$, где максимум берётся по всем булевым функциям f от n переменных. Функцию $D_{d,\mathcal{P}}(n)$ назовём *функцией Шеннона* длины ЕПТ.

В работе [3] для каждой булевой функции $f(\tilde{x}^n)$ была введена [3, с. 69–70] величина $m(f)$, достаточно просто вычисляемая по столбцу значений этой функции, и было фактически установлено [3, теорема 1] равенство $D_{d,\{\{A,B\}\}}(f) = m(f)$ для любого $d \in \mathbb{N}$; определение величины $m(f)$ ввиду его громоздкости здесь не приводится. В [4] был рассмотрен случай $d = 1$ и произвольного тестового полюсного множества $\mathcal{P}$, отличного от $\{\{A, B\}\}$: в [4, теорема 2] найдено точное значение величины $D_{1,\mathcal{P}}(f)$ для любой булевой функции $f(\tilde{x}^n)$, а в [4, следствие 1] установлено равенство $D_{1,\mathcal{P}}(n) = \min(3, n)$ для любого $n \geqslant 0$. В работе [5] рассматривался случай произвольных целого $d \geqslant 2$ и тестового полюсного множества $\mathcal{P}$, содержащего хотя бы две отличных от $\{A, B\}$ и непересекающихся пары полюсов: в [5, теорема 1] найдено точное значение величины $D_{d,\mathcal{P}}(f)$ для любой булевой функции $f(\tilde{x}^n)$, а в [5, следствие 1] установлено равенство $D_{d,\mathcal{P}}(n) = \min(2, n)$ для любого $n \geqslant 0$.

Положим $\mathcal{P}' = \mathcal{P} \setminus \{\{A, B\}\}$. Если $\mathcal{P}' = \{\{P_1, P_2\}, \{P_1, P_3\}, \{P_2, P_3\}\}$ для некоторых $P_1, P_2, P_3 \in \{A, B, V_1, ..., V_d\}$, то не более одного из полюсов P_1, P_2, P_3 принадлежит множеству $\{A, B\}$; без ограничения общности будем считать, что $P_2 \notin \{A, B\}$ и $P_3 \notin \{A, B\}$, и положим $\mathcal{P}'' = \mathcal{P} \setminus$

$\{\{P_1, P_2\}\}$. В противном случае полагаем $\mathcal{P}'' = \mathcal{P}$. Введём обозначение

$$N_1(\mathcal{P}) = \min\left(|\mathcal{P}''|, \min_{V \in \{V_1,\ldots,V_d\}} |\mathcal{P}'' \setminus \{\{A,B\},\{A,V\},\{B,V\}\}| + 1\right).$$

Обозначим через $N_2(\mathcal{P})$ число таких пар, являющихся элементами множества $\mathcal{P}''$, что в каждой паре оба полюса отличны от A и от B.

Сформулируем основные результаты данной работы.

Теорема 1. *Для любой булевой функции $f(\tilde{x}^n)$, любого целого $d \geqslant 2$ и любого такого тестового полюсного множества $\mathcal{P}$, что $|\mathcal{P}'| \geqslant 1$ и любые две пары полюсов из множества $\mathcal{P}'$ содержат общий полюс, справедливо равенство*

$$D_{d,\mathcal{P}}(f) = \begin{cases} m(f), & \text{если } m(f) \leqslant 2, \\ 2, & \text{если } m(f) > 2 \text{ и существуют такое } r \in \{1,\ldots,n\}, \\ & \text{такие попарно различные } i_1,\ldots,i_r \in \{1,\ldots,n\} \text{ и} \\ & \text{такие } \alpha_1,\ldots,\alpha_r \in \{0,1\}, \text{ что } f(\tilde{x}^n) \leqslant x_{i_1}^{\alpha_1} \vee \ldots \vee x_{i_r}^{\alpha_r} \\ & \text{и выполнен один из следующих случаев:} \\ & 1)\ f(\tilde{x}^n) \not\leqslant x_{i_1}^{\overline{\alpha}_1} \vee \ldots \vee x_{i_r}^{\overline{\alpha}_r} \text{ и } r \leqslant N_1(\mathcal{P}) + 1, \\ & 2)\ f(\tilde{x}^n) \leqslant x_{i_1}^{\overline{\alpha}_1} \vee \ldots \vee x_{i_r}^{\overline{\alpha}_r} \text{ и } r \leqslant N_2(\mathcal{P}) + 1, \\ 3 & \text{иначе.} \end{cases}$$

(Запись $f(\tilde{x}^n) \not\leqslant x_{i_1}^{\overline{\alpha}_1} \vee \ldots \vee x_{i_r}^{\overline{\alpha}_r}$ означает, что не выполнено функциональное неравенство $f(\tilde{x}^n) \leqslant x_{i_1}^{\overline{\alpha}_1} \vee \ldots \vee x_{i_r}^{\overline{\alpha}_r}$; полагаем $x_{i_j}^1 = x_{i_j}$, $x_{i_j}^0 = \overline{x}_{i_j}$.)

Следствие 1. *Для любых целых $n \geqslant 0$, $d \geqslant 2$ и любого такого тестового полюсного множества $\mathcal{P}$, что $|\mathcal{P}'| \geqslant 1$ и любые две пары полюсов из множества $\mathcal{P}'$ содержат общий полюс, справедливо неравенство $D_{d,\mathcal{P}}(n) \leqslant \min(3, n)$.*

Объединяя формулировки теоремы 1 и следствия 1 с вышеперечисленными результатами работ [3–5], получаем, что для любых булевой функции $f(\tilde{x}^n)$, $d \in \mathbb{N}$ и тестового полюсного множества $\mathcal{P}$ удалось найти точное значение величины $D_{d,\mathcal{P}}(f)$, причём в случае $\mathcal{P} \neq \{\{A,B\}\}$ оно не превосходит 3.

Список литературы

[1] О. Б. Лупанов, *Асимптотические оценки сложности управляющих систем*, Изд-во Моск. ун-та, М, 1984, 138 с.

[2] И. А. Чегис, С. В. Яблонский, “Логические способы контроля работы электрических схем”, *Труды МИАН*, **51** (1958), 270–360.

[3] К. А. Попков, “О проверяющих тестах размыкания для контактных схем”, *Дискретная математика*, **29**:4 (2017), 66–86. DOI: 10.4213/dm1447.

[4] К. А. Попков, “Короткие проверяющие тесты размыкания для контактных схем с дополнительным полюсом”, *Дискретная математика*, **36**:4 (2024), 117–137. DOI: 10.4213/dm1844.

[5] К. А. Попков, “Короткие единичные проверяющие тесты размыкания для контактных схем с двумя и более дополнительными полюсами”, *Прикладная дискретная математика*, 2026, № 71, 63–74. DOI: 10.17223/20710410/71/4.

Статья поступила 9 ноября 2026 г.

On minimal single fault detection tests of contact break for contact circuits with additional poles

K. A. Popkov

We consider a problem of synthesis of multi-pole irredundant contact circuits, implementing given Boolean functions between poles A and B and allowing short single fault detection tests relative to contact breaks. For each Boolean function and each test pole set $\mathcal{P}$, the minimal possible length value of such a test is found. In particular, it is proved that this value does not exceed 3 if $\mathcal{P} \neq \{\{A, B\}\}$.

Keywords: contact circuit, contact break, additional pole, single fault detection test, Boolean function.

References

[1] O. B. Lupanov, *Asimptoticheskie otsenki slozhnosti upravlyayushchikh sistem*, MSU Publ., M, 1984 (in Russian), 138 pp.

[2] I. A. Chegis, S. V. Yablonskiy, “Logical ways of monitoring the operation of electrical circuits”, *Trudy MIAN*, **51** (1958), 270–360 (in Russian).

[3] K. A. Popkov, “On fault detection tests of contact break for contact circuits”, *Discrete Mathematics and Applications*, **28**:6 (2018), 369–383. DOI: 10.1515/dma-2018-0033.

[4] K. A. Popkov, “Short fault detection tests of contact break for contact circuits with an additional pole”, *Discrete Mathematics and Applications*, **36**:1 (2026), 27–41. DOI: 10.1515/dma-2026-0003.

[5] K. A. Popkov, “Short single fault detection tests of contact break for contact circuits with two or more additional poles”, *Prikladnaya diskretnaya matematika*, 2026, № 71, 63–74 (in Russian. DOI: 10.17223/20710410/71/4).

Received on November 9, 2026