Сложность реализации почти всех булевых функций клеточными автоматами с локаторами

Ч. Надиров*

В работе исследуется возможность реализации произвольной булевой функции клеточными автоматами с локаторами. Доказано, что в двумерном клеточном автомате с локаторами любая булева функция от n переменных реализуется схемой площади $2^n+O(n2^{n/2})$ с задержкой четыре такта и поступлением нового входного набора на каждом такте. Подсчёт конфигураций даёт нижнюю оценку $\Omega(2^n)$ для почти всех функций. Функция Шеннона площади имеет порядок 2^n.

Ключевые слова: клеточные автоматы, локаторы, булевы функции, площадь схем, функция Шеннона.

1. Введение

Понятие клеточного автомата возникло в результате усовершенствования модели Дж. фон Неймана [1], предложенной им для описания процессов самовоспроизведения в биологии и технике. В дальнейшем эта модель использовалась В. Б. Кудрявцевым, А. С. Подколзиным, А. А. Болотовым, Э. Э. Гасановым [2, 3].

В модели клеточного автомата с локаторами, предложенной Э. Э. Гасановым [4], ячейки принимают суммы сигналов из заданных областей пространства, что позволяет передавать информацию на произвольное расстояние. В работе [5] Г. В. Калачев привёл некоторые уточнения этой модели. В работе [6] клеточные автоматы с локаторами рассматриваются как модель устройств с беспроводной связью.

В работе [7] описывается метод представления схем из функциональных элементов (СФЭ) клеточными автоматами с локаторами (КАсЛ),

* *Надиров Чингиз* — аспирант каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ имени М. В. Ломоносова; научный руководитель — д-р физ.-мат. наук, профессор Гасанов Эльяр Эльдарович, e-mail: chingiz.nadirov@math.msu.ru.

Nadirov Chingiz — PhD student, Department of Mathematical Theory of Intelligent Systems, Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University; supervisor — Professor Elyar Eldarovich Gasanov, Doctor of Physical and Mathematical Sciences.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

причем СФЭ с n элементами моделируется КАсЛ с площадью порядка n^2. Откуда сразу получаем, что булевские функции можно реализовать КАсЛ с площадью порядка $2^{2n}/n^2$. В данной работе будет приведен более экономный метод реализации булевских функций КАсЛ.

2. Постановка задачи

Автомат на решётке $\mathbb{Z}^2$ имеет конечное множество состояний Q с состоянием покоя q_0 и конечную коммутативную полугруппу сигналов $(G, +)$ с нейтральным элементом e. Локаторы суммируют сигналы из заданных областей, исключая саму ячейку. Правила синхронного перехода, алфавиты и локаторы фиксированы независимо от числа переменных и функции.

На каждом такте $s \geq 0$ на вход схемы поступает булев набор $x(s) = (x_1(s), \ldots, x_n(s)) \in \{0,1\}^n$. Входные ячейки $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ посылают в эфир сигналы, задаваемые извне:

$$g_s(\alpha_i) = b_{x_i(s)}, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

где $g_s(\alpha_i)$ — сигнал ячейки α_i в момент s, а $b_0, b_1 \in G$, $b_0 \neq b_1$, соответствуют логическим значениям 0 и 1. Входные наборы могут изменяться независимо на каждом такте. Остальные ячейки обновляются синхронно по правилам автомата; начальный эфир вне входов нейтрален.

Схема реализует булеву функцию $F\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ с задержкой $t > 0$, если для любого входного потока и всех $s \geq 0$

$$g_{s+t}(\alpha_{\text{out}}) = b_{F(x(s))},$$

где выходная ячейка α_{out} отлична от входных. Таким образом, результат появляется через t тактов при поступлении нового входного набора на каждом такте.

Площадь схемы — число ячеек минимального осепараллельного прямоугольника, содержащего входы, выход, отличный от всех входов, и все ячейки, которые хотя бы в один момент времени хотя бы на одном допустимом входном потоке имеют состояние, отличное от q_0, или сигнал, отличный от e.

В работе предлагается конструкция клеточного автомата с локаторами, не требующая изменения его правил в зависимости от числа переменных и реализуемой булевой функции. Минимальную площадь схемы, реализующей булеву функцию F в этом автомате, обозначим через $L(F)$. Функцией Шеннона площади назовём величину

$$L(n) = \max_{F\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}} L(F).$$

3. Основной результат

Теорема. *Для почти всех булевых функций от n переменных выполнено*

$$L(F) \asymp 2^n.$$

Знак $\asymp$ означает совпадение порядка, а «почти все» — долю, стремящуюся к единице при $n \to \infty$.

Для любой функции от $n \geq 1$ переменных построена схема площади

$$S(n) = 2^n + O(n2^{n/2}).$$

Автомат имеет девять состояний, четыре сигнала и два локатора. Задержка составляет четыре такта, новый входной набор может поступать на каждом такте. Функция Шеннона площади удовлетворяет соотношению $L(n) \asymp 2^n$.

Идея построения. Переменные разбиваются на две группы, полные конъюнкции которых совмещаются в прямоугольной матрице. Выбор активных ячеек определяется таблицей истинности функции. Горизонтальное и вертикальное агрегирование сигналов в двухкомпонентном алфавите обеспечивает вычисление функции при непрерывном поступлении входных наборов.

Нижняя оценка $\Omega(2^n)$ для почти всех функций получена подсчётом размеченных начальных конфигураций клеточного автомата с локаторами и сравнением их числа с общим числом булевых функций.

Список литературы

[1] John von Neumann, *Theory of self-reproducing automata*, University of Illinois Press, London, 1966.

[2] В. Б. Кудрявцев, А. С. Подколзин, А. А. Болотов, *Основы теории однородных структур*, Наука, Москва, 1990 (296 с.).

[3] В. Б. Кудрявцев, Э. Э. Гасанов, А. С. Подколзин, *Теория интеллектуальных систем: в 4 т. Т. 4. Теория автоматов*, 2-е изд., Издательство Московского университета, Москва, 2026 (305 с.).

[4] Э. Э. Гасанов, “Клеточные автоматы с локаторами”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **24**:2 (2020), 119–132.

[5] Г. В. Калачев, “Замечания к определению клеточного автомата с локаторами”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **24**:3 (2020), 47–56.

[6] Э. Э. Гасанов, “Клеточные автоматы с локаторами как модель устройств с беспроводной связью”, *Математические вопросы кибернетики*, **21**, ФИЗМАТЛИТ, Москва, 2023, 5–51. DOI: 10.20948/mvk-2023-5.

[7] Э. Э. Гасанов, Г. В. Калачев, Д. А. Бухарина, “Моделирование схем из функциональных элементов клеточными автоматами с локаторами”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **30**:4 (2026), 202–205.

Статья поступила 26 октября 2026 г.

The Complexity of Implementing Almost All Boolean Functions Using Cellular Automata with Locators

C. Nadirov

This paper investigates the possibility of implementing arbitrary Boolean functions using cellular automata with locators. It is proved that, in a two-dimensional cellular automaton with locators, any Boolean function of n variables can be implemented by a circuit of area $2^n + O(n2^{n/2})$, with a delay of four time steps and a new input vector supplied at every time step. Configuration counting yields a lower bound of $\Omega(2^n)$ for almost all Boolean functions. The Shannon function for circuit area is of order 2^n.

Keywords: cellular automata, locators, Boolean functions, circuit area, Shannon function.

References

[1] John von Neumann, *Theory of self-reproducing automata*, University of Illinois Press, London, 1966.

[2] V. B. Kudryavtsev, A. S. Podkolzin, A. A. Bolotov, *Foundations of the theory of homogeneous structures*, Nauka, Moscow, 1990 (296 pp.) (In Russian).

[3] V. B. Kudryavtsev, E. E. Gasanov, A. S. Podkolzin, *Theory of intelligent systems: in 4 volumes. Vol. 4. Automata theory*, 2nd ed., Moscow University Press, Moscow, 2026 (305 pp.) (In Russian).

[4] E. E. Gasanov, “Cellular automata with locators”, *Intelligent systems*, **24**:2 (2020), 119–132 (In Russian).

[5] G. V. Kalachev, “Remarks on the definition of a cellular automaton with locators”, *Intelligent systems*, **24**:3 (2020), 47–56 (In Russian).

[6] E. E. Gasanov, “Cellular automata with locators as a model of devices with wireless communication”, *Mathematical problems of cybernetics*, **21**, FIZMATLIT, Moscow, 2023, 5–51. DOI: 10.20948/mvk-2023-5 (In Russian).

[7] E. E. Gasanov, G. V. Kalachev, D. A. Bukharina, “Modeling circuits of functional elements by cellular automata with locators”, *Intelligent systems*, **30**:4 (2026), 202–205 (In Russian).

Received on October 26, 2026