Асимптотически оптимальные гомеоморфные односторонние вложения троичных деревьев подобных формул в прямоугольные решетки

С. А. Ложкин*, Д. Мо‡

Рассматривается задача построения односторонних вложений троичных деревьев формул, подобных заданным формулам с поднятыми отрицаниями над базисом коммутативных и ассоциативных операций, в прямоугольные решетки. Для произвольной исходной формулы получены оценки глубины подобной ей формулы и высоты прямоугольной решетки, допускающей каноническое вложение ее дерева.

Ключевые слова: деревья формул; подобные формулы; вложения; прямоугольные решетки;.

1. Постановка задачи и основные понятия[1]

В данной работе исследуется задача вложения троичных деревьев подобных формул над базисом коммутативных и ассоциативных операций в прямоугольную решетку (ПР), т. е. граф, вершинами которого являются точки плоскости (x, y), где x и y — целые числа, заключенные в целочисленные отрезки $[a, a + \ell]$ и $[b, b + h]$ соответственно, а ребра соединяют все пары точек (x_1, y_1) и (x_2, y_2) таких, что $|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| = 1$, а его площадью называется величина ℓh.

Будем, как обычно, через $V(G)$, $E(G)$ и $C(G)$ обозначать множество вершин, ребер и простых цепей неориентированного графа G соответственно. Следуя [2], *вложением* графа G в граф F назовем пару инъективных отображений (φ, ψ) такую, что $\varphi\colon V(G) \to V(F)$, $\psi\colon E(G) \to C(F)$ и для

*Ложкин Сергей Андреевич — д.ф.-м.н., проф. каф. математической кибернетики ВМК МГУ, e-mail: lozhkin@cs.msu.ru.

Lozhkin Sergey Andreevich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Department of Mathematical Cybernetics.

‡*Мо Ди* — асп. каф. математической кибернетики ВМК МГУ, e-mail: xdmodi1991@163.com.

Mo Di — PhD student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Department of Mathematical Cybernetics.

[1]Те понятия, которые здесь не определяются, могут быть найдены, например, в [1].

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

любого ребра $e = (u, v) \in E(G)$ цепь $\psi(e)$ соединяет вершины $\varphi(u)$ и $\varphi(v)$. При этом образы ребер из $E(G)$ будем считать *транзитными цепями* данного вложения и будем рассматривать лишь т.н. *гомеоморфные* вложения, в которых транзитные цепи не пересекаются по внутренним вершинам. Будем предполагать также, что при вложении деревьев в ПР образы листьев дерева должны быть расположены на нижней стороне решетки, а образ корня — на ее верхней стороне, считая указанные вложения *каноническими*.

Пусть задан счетный упорядоченный алфавит булевых переменных (БП) $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ и базис Б $= \{\varphi_1, \ldots, \varphi_b\}$, где для каждого i, $i = 1, ..., b$, функция алгебры логики (ФАЛ) φ_i существенно зависит от всех своих k_i БП, если $k_i \geqslant 2$. Обычным образом введем понятие формулы над базисом Б и реализуемой ею ФАЛ, а множество всех таких формул будем обозначать через $\mathrm{U}_{\text{Б}}^{\Phi}$.

Формуле F из $\mathrm{U}_{\text{Б}}^{\Phi}$, как обычно, сопоставим корневое дерево $\mathcal{D}$, которое описывает ее структуру, заметив, что ранг $R(F)$ формулы F, то есть число вхождений в нее БП, равен числу листьев связанного с ней дерева $\mathcal{D}$, а ее глубина $D(F)$ равна глубине этого дерева. Сложностью $L(F)$ формулы F называется число вхождений в нее функциональных символов (ФС), а альтернированием $Alt(F)$ — максимальное число изменений пометок функций вдоль пути от листа дерева, соответствующего формуле F, до его корня.

Будем рассматривать базис $\text{Б}'_0 = \{x_1 \& x_2 \& x_3,\ x_1 \vee x_2 \vee x_3, x_1 \vee x_2, x_1 \& x_2, \bar{x}\}$, и положим $\mathrm{U}_{\text{Б}'_0}^{\Phi} = \mathrm{U}^{\Phi}$. Формула из U^{Φ} называется *формулой с поднятыми отрицаниями*, если все ФС отрицания встречаются только над БП. Формула F_2 называется *подобной* формуле F_1, если F_2 может быть получена из F_1 путем нескольких эквивалентных преобразований с помощью тождеств ассоциативности и коммутативности[2] для базисных ФАЛ базиса $\text{Б}'_0$.

2. Формулировки известных и вновь полученных результатов

Теорема 1 ([3]). *Для любой формулы F в базисе двуместных коммутативных и ассоциативных функций Б$= \{\varphi_1, ..., \varphi_b\}$ и числа, определяемого равенством $n = \lceil \log_2(L(F) + 1) + \log_2 6 \cdot Alt(F) \rceil$, существует формула F', подобная F, глубины не более $d = n + 1$, а также каноническое*

[2]При этом допускается замена трехвходового базисного элемента суперпозицией двух двухвходовых элементов того же типа и обратно.

вложение дерева $\mathcal{D}(F')$ в ПР высоты не более $h = \frac{n}{3}(1+\alpha(n))$, где $\alpha(n) = O(\frac{1}{\sqrt{n}}) = o(1)$ при $n \to \infty$.

Теорема 2 ([4]). *Пусть $F(x_1, ..., x_n)$ — формула с поднятыми отрицаниями над базисом $Б_0'$, в которой минимальный ранг максимальных по включению букв БП $x_1, ..., x_n$ элементарных конъюнкций или дизъюнкций, являющихся ее подформулами, не меньше, чем 3^s. Тогда существует подобная F формула $\hat{F}$ глубины не больше, чем d, где $d = \lceil \log_3(2L(F)+1) \rceil + Alt(F) + 3$, а также каноническое вложение дерева этой формулы в ПР высоты не более, чем $d - \lfloor \frac{s}{3} \rfloor$.*

Теорема 2 показывает, что уменьшение высоты вложения может быть получено за счет достаточно больших максимальных элементарных конъюнкций или дизъюнкций исходной формулы. Следующая теорема является основным результатом данной работы.

Теорема 3. *Для любой формулы F с поднятыми отрицаниями над базисом $Б_0'$ положим $n = \left\lceil \log_3\big(2L(F)+1\big) + \mathrm{Alt}(F)\log_3 12 \right\rceil + 1$. Тогда существует подобная F формула $\widehat{F}$ глубины не более $n+1$, дерево которой допускает вложение в ПР высоты не более*

$$\left\lceil \frac{2n + 2\sqrt{n-1}}{3} \right\rceil + 2 = \frac{2}{3}n + O(\sqrt{n}).$$

Аналогично теореме 1 она дает искомые оценки исследуемых величин через сложность $L(F)$ и альтернирование $Alt(F)$ исходной формулы F. Ее доказательство основано на рекурсивном разбиении троичных деревьев специального вида из диссертации [5]. Из [5] следует также, что в общем случае указанные оценки не могут быть существенно улучшены.

Список литературы

[1] С. А. Ложкин, *Лекции по основам кибернетики*, Издательский отдел факультета ВМиК МГУ, М., 2004.

[2] С. А. Ложкин, Ли Да Мин, “О некоторых оптимальных вложениях двоичных и троичных деревьев в плоские прямоугольные решетки”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и кибернет.*, 1995, № 4, 49–55.

[3] С. А. Ложкин, Л. И. Высоцкий, “О некоторых асимптотически оптимальных односторонних вложениях деревьев подобных формул в прямоугольные решетки”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и кибернет.*, 2017, № 2, 38–45.

[4] Б. М. Ибрагимов, *О некоторых асимптотически оптимальных односторонних вложениях троичных деревьев подобных формул в прямоугольные решетки*, магистерская диссертация, МГУ, М., 2020.

[5] Ли Да Мин, *Некоторые оптимальные вложения древовидных графов в плоские прямоугольные решетки*, дис. канд. физ.-мат. наук, МГУ, М., 1994 .

Статья поступила 7 ноября 2026 г.

Asymptotically optimal one-sided embeddings of ternary trees of similar formulas into rectangular grids

S. A. Lozhkin, D. Mo

The problem of constructing one-sided embeddings of ternary trees of formulas similar to given formulas with negations pushed down to the variables, over a basis of commutative and associative operations, into rectangular grids is considered. For an arbitrary initial formula, estimates are obtained for the depth of a similar formula and for the height of a rectangular grid admitting a canonical embedding of its tree.

Keywords: formula trees; similar formulas; embeddings; rectangular grids;.

References

[1] S. A. Lozhkin, *Lectures on the Fundamentals of Cybernetics*, Publishing Department of the Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Moscow State University, Moscow, 2004.

[2] S. A. Lozhkin, Li Da Min, "On Some Optimal Embeddings of Binary and Ternary Trees into Planar Rectangular Grids", *Moscow University Computational Mathematics and Cybernetics*, 1995, № 4, 47–53.

[3] S. A. Lozhkin, L. I. Vysotsky, "On Some Asymptotically Optimal One-Sided Embeddings of Trees of Similar Formulas into Rectangular Grids", *Moscow University Computational Mathematics and Cybernetics*, **41**:2 (2017), 89–96.

[4] B. M. Ibragimov, *On Some Asymptotically Optimal One-Sided Embeddings of Ternary Trees of Similar Formulas into Rectangular Grids*, Master's Thesis, Lomonosov Moscow State University, Moscow, 2020.

[5] Li Da Min, *Some Optimal Embeddings of Tree Graphs into Planar Rectangular Grids*, Ph.D. Thesis, Lomonosov Moscow State University, Moscow, 1994.

Received on November 7, 2026