Асимптотически оптимальный по сложности синтез булевых схем с линейной динамической активностью для произвольных булевых функций

Ю. Дай*, С. А. Ложкин‡

Рассматривается задача синтеза схем из функциональных элементов (СФЭ) с одновременными ограничениями на взвешенную сложность и динамическую активность — наибольшее число элементов, значения которых различаются на двух входных наборах. Показано, что для любого конечного полного базиса $\mathcal{B}$, принадлежащего объединению двух специальных классов таких базисов, и для любой булевой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ можно построить такую реализующую её СФЭ Σ_f в базисе $\mathcal{B}$, сложность $L(\Sigma_f)$ и динамическая активность $C(\Sigma_f)$ которой при $n = 1, 2, \ldots$ удовлетворяют неравенствам:

$$L(\Sigma_f) \leq \rho(\mathcal{B})\frac{2^n}{n}\left(1 + \frac{6\log_2 n}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right), \quad C(\Sigma_f) = O(n),$$

где $\rho(\mathcal{B})$ — наименьший приведённый вес элементов базиса. Заметим, что первая из этих оценок асимптотически совпадает с соответствующей функцией Шеннона, а вторая даёт линейную верхнюю границу.

Ключевые слова: булевы схемы, взвешенная сложность, динамическая активность, функция Шеннона, оптимизация схем по двум параметрам.

1. Постановка задачи

Пусть $\mathcal{B} = \{\varepsilon_i = \langle \varphi_i, L_i \rangle\}_{i=1}^{b}$ — фиксированный конечный полный базис, где элемент ε_i реализует булеву функцию $\varphi_i(x_1, \ldots, x_{k_i})$, существенно

*Дай Юэ — асп. каф. математической кибернетики ВМК МГУ, e-mail: daiy0928@cs.msu.ru.

Dai Yue — PhD student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Department of Mathematical Cybernetics.

‡*Ложкин Сергей Андреевич* — д.ф.-м.н., проф. каф. математической кибернетики ВМК МГУ, e-mail: lozhkin@cs.msu.ru.

Lozhkin Sergey Andreevich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Department of Mathematical Cybernetics.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

зависящую от k_i булевых переменных, если $k_i \geq 2$, и имеет вес $L_i > 0$ для всех $i = 1, \ldots, b$. Число входов k_i называется порядком элемента. Для СФЭ Σ обозначим через $V(\Sigma)$ множество её элементов, через $L(u)$ — вес элемента u, а через $\varphi_u(x_1, \ldots, x_n)$ — функцию на его выходе. Положим

$$L(\Sigma) = \sum_{u \in V(\Sigma)} L(u), \qquad C(\Sigma) = \max_{a,b \in \{0,1\}^n} \sum_{u \in V(\Sigma)} \big(\varphi_u(a) \oplus \varphi_u(b)\big).$$

Заметим, что величина $C(\Sigma)$, называемая динамической активностью СФЭ Σ, равна максимальному числу её элементов с различными значениями на двух входных наборах.

Как обычно, через $P_2(n)$ обозначим множество булевых функций от переменных $X(n) = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Сложность $L_{\mathcal{B}}(f)$ и динамическая активность $C_{\mathcal{B}}(f)$ функции $f \in P_2(n)$ равны минимумам $L(\Sigma)$ и $C(\Sigma)$ соответственно по всем СФЭ Σ над базисом $\mathcal{B}$, реализующим f. Соответствующие функции Шеннона определяются равенствами

$$L_{\mathcal{B}}(n) = \max_{f \in P_2(n)} L_{\mathcal{B}}(f), \quad C_{\mathcal{B}}(n) = \max_{f \in P_2(n)} C_{\mathcal{B}}(f).$$

Напомним, что приведённый вес элемента ε_i при $k_i \geq 2$ равен $L_i/(k_i - 1)$; обозначим через $\rho(\mathcal{B}) = \min_{i:k_i \geq 2} L_i/(k_i - 1)$ минимальный приведённый вес элементов базиса $\mathcal{B}$. Классическая асимптотика взвешенной сложности имеет вид $L_{\mathcal{B}}(n) \sim \rho(\mathcal{B}) 2^n/n$ [1]. Линейная верхняя оценка $C_{\mathcal{B}}(n)$ известна для любого конечного полного базиса, причём для стандартного базиса $\mathcal{B}_0 = \{\langle \wedge_2, 1\rangle, \langle \vee_2, 1\rangle, \langle \neg, 1\rangle\}$ она достигается одновременно с асимптотически оптимальной сложностью [2]. Попытки обобщить этот результат на некоторые классы базисов предприняты в [3]. В настоящей работе аналогичные оценки получены для двух классов базисов, задаваемых условиями на конъюнктивные и дизъюнктивные элементы.

2. Основной результат

Функция φ порядка k называется *конъюнктивной*, если для некоторого $a \in \{0,1\}^k$ выполнено $\varphi(a) = 1$ и $\varphi(a \oplus e_i) = 0$ при всех i, где e_i — i-й единичный вектор. Функция называется *нормализованной сильно конъюнктивной*, если эти равенства выполнены при $a = 1^k$ и, кроме того, $\varphi(1^k \oplus e_i \oplus e_j) = 0$ для некоторых $i \neq j$. *Дизъюнктивная* функция определяется двойственными условиями: $\psi(d) = 0$, $\psi(d \oplus e_i) = 1$ для некоторого d и всех i. Те же термины применяются к соответствующим элементам базиса.

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{B}$ содержит либо нормализованный сильно конъюнктивный элемент приведённого веса $\rho(\mathcal{B})$, либо конъюнктивный и дизъюнктивный элементы, каждый приведённого веса $\rho(\mathcal{B})$. Тогда для каждой $f \in P_2(n)$ существует реализующая её СФЭ Σ_f над базисом $\mathcal{B}$, для которой при $n = 1, 2, \ldots$ выполняются соотношения*

$$\begin{aligned} L(\Sigma_f) &\le \rho(\mathcal{B})\frac{2^n}{n}\left(1 + \frac{6\log_2 n}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right), \\ C(\Sigma_f) &= O(n), \end{aligned} \tag{1}$$

где постоянные в O-оценках зависят только от базиса $\mathcal{B}$.

Обозначим через $\mathrm{as}(g)$, $g \in P_2(n)$, среднее по всем входным наборам число чувствительных координат булевой функции g, которое определяется равенством

$$\mathrm{as}(g) = 2^{-n} \sum_{a \in \{0,1\}^n} \sum_{i=1}^{n} \big(g(a) \oplus g(a \oplus e_i)\big).$$

Координата i называется чувствительной для g на наборе a, если $g(a) \ne g(a \oplus e_i)$.

Следствие 1. *Для схемы Σ_f из теоремы 1 имеем $\sum_{u \in V(\Sigma_f)} \mathrm{as}(\varphi_u) = O(n^2)$.*

Действительно, эта сумма равна n-кратному среднему числу изменившихся элементов при равномерном выборе входного набора и изменяемой координаты, которое не превосходит $nC(\Sigma_f)$.

Список литературы

[1] О. Б. Лупанов, *Асимптотические оценки сложности управляющих систем*, Изд-во МГУ, М., 1984.

[2] S. A. Lozhkin, M. S. Shupletsov, "Switching activity of Boolean circuits and synthesis of Boolean circuits with asymptotically optimal complexity and linear switching activity", *Lobachevskii Journal of Mathematics*, **36**:4 (2015), 450–460. DOI: 10.1134/s1995080215040277.

[3] Н. В. Пименов, *О синтезе близких к оптимальным как по сложности, так и по динамической активности схем из функциональных элементов в некоторых базисах*, Выпускная квалификационная работа, МГУ, Москва, 2020 .

Статья поступила 8 ноября 2026 г.

Asymptotically Optimal Boolean Circuit Synthesis in Complexity with Linear Switching Activity for Arbitrary Boolean Functions

Y. Dai, S. A. Lozhkin

We consider the synthesis of Boolean circuits with simultaneous bounds on weighted complexity and switching activity, the maximum number of gates whose values differ between two input assignments. For every finite complete basis $\mathcal{B}$ belonging to the union of two special classes and every Boolean function $f(x_1, \ldots, x_n)$, we construct a circuit Σ_f over $\mathcal{B}$ that computes f. Its weighted complexity $L(\Sigma_f)$ and switching activity $C(\Sigma_f)$ satisfy the following bounds for $n = 1, 2, \ldots$:

$$L(\Sigma_f) \leq \rho(\mathcal{B}) \frac{2^n}{n} \left(1 + \frac{6 \log_2 n}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right), \quad C(\Sigma_f) = O(n),$$

where $\rho(\mathcal{B})$ is the minimum reduced weight of the basis elements. The first bound is asymptotically equal to the corresponding Shannon function, while the second is a linear upper bound.

Keywords: Boolean circuits, weighted complexity, switching activity, Shannon function, two-parameter circuit optimization.

References

[1] O. B. Lupanov, *Asymptotic Estimates of the Complexity of Control Systems*, Moscow State University Publishing House, Moscow, 1984.

[2] S. A. Lozhkin, M. S. Shupletsov, "Switching activity of Boolean circuits and synthesis of Boolean circuits with asymptotically optimal complexity and linear switching activity", *Lobachevskii Journal of Mathematics*, **36**:4 (2015), 450–460. DOI: 10.1134/s1995080215040277.

[3] N. V. Pimenov, *On the synthesis of circuits of functional elements in certain bases that are close to optimal in both complexity and switching activity*, Graduation thesis, Moscow State University, Moscow, 2020.

Received on November 8, 2026