Моделирование схем из функциональных элементов клеточными автоматами с локаторами

Э. Э. Гасанов*, Г. В. Калачев†, Д. А. Бухарина§

В статье предлагается метод моделирования схем из функциональных элементов (СФЭ) клеточными автоматами с локаторами (КАсЛ). Если дана СФЭ с числом элементов k и глубиной d, то моделирующая ее КАсЛ будет иметь задержку $4d + 1$ и площадь порядка k^2.

Ключевые слова: схемы из функциональных элементов, клеточные автоматы с локаторами.

1. Введение и формулировка результата

Определение клеточных автоматов с локаторами можно найти в работе [1]. Особенность клеточных автоматов с локаторами заключается в том, что каждый элементарный автомат (называемый ячейкой) может посылать в эфир сигналы, и у каждого ячейки имеются локаторы, направленные в разные стороны. Каждый из локаторов позволяет получать на него суммарный сигнал всех автоматов с того направления, куда направлен локатор. Соответственно новое состояние автомата и посылаемый автоматом сигнал определяются значениями локаторов и состояниями соседей автомата.

Гасанов Эльяр Эльдарович — д. ф.-м. н., зав. каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: el_gasanov@mail.ru, ORCID: 0000-0002-0739-0967.

Gasanov Elyar Eldarovich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Head of Department of Mathematical Theory of Intelligent Systems, Faculty of Mechanics and Mathematics, Moscow State University.

†*Калачев Глеб Вячеславович* — канд. физ.-мат. наук, с. н. с. лаборатории проблем теоретической кибернетики мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: gleb.kalachev@yandex.ru, ORCID: 0000-0003-2695-3179.

Kalachev Gleb Vyacheslavovich — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior Researcher, Laboratory of Problems of Theoretical Cybernetics, Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

§*Бухарина Дарья Анатольевна* — студ. каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: daria.bukharina@math.msu.ru, ORCID: 0009-0000-6203-9080.

Bukharina Daria Anatolevna — Student of Department of Mathematical Theory of Intelligent Systems, Faculty of Mechanics and Mathematics, Moscow State University.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

Схемы из функциональных элементов (СФЭ) представляют собой ациклический ориентированный граф с тремя видами вершин: входами, которым приписаны переменные и через которые передаются входные воздействия, выходами, через которые наружу передаются результаты вычислений и функциональные элементы из некоторого выбранного базиса.

Сложностью СФЭ назовём число функциональных элементов в ней.

СФЭ назовём *сбалансированной*, если на любом пути от входа к выходу в схеме встречается одно и то же количество функциональных элементов, это количество будем называть *глубиной схемы*. Понятно, что любую схему можно сделать сбалансированной, если включить в базис функциональный элемент, реализующий тождественную функцию (такой элемент называется буфером).

Для моделирования СФЭ мы введём в клеточный автомат с локаторами (КАсЛ) специальные ячейки, называемые *входами*, которые будут подавать в эфир сигналы, задаваемые извне, а также специальные ячейки, называемые *выходами*, состояния которых будут интерпретироваться как результаты вычислений.

Будем говорить, что *КАсЛ моделирует СФЭ*, если в результате функционирования при подаче на входы СФЭ и КАсЛ одинаковых значений на выходах СФЭ и КАсЛ появляется одинаковый результат. Скажем, что КАсЛ является *конвейерным* вычислителем булевой функции *с задержкой* d, если на входы каждый такт можно подавать входные значения, и при этом с задержкой в d тактов на выходе каждый такт будем получать значение функции на входных значениях.

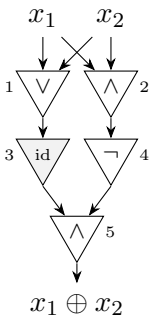
Ячейку КАсЛ назовём *активной*, если в процессе функционирования КАсЛ эта ячейка хоть в какой-то момент находится не в состоянии покоя.

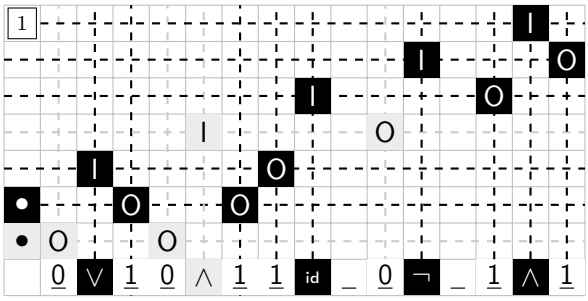
Площадью КАсЛ назовём площадь минимального прямоугольника, охватывающего все активные ячейки.

Теорема 1. *Для любой сбалансированной СФЭ в стандартном базисе со сложностью k, с n входами, m выходами и глубиной d существует конвейерный двумерный клеточный автомат с 2 локаторами (горизонтальной и вертикальной), который моделирует эту СФЭ с задержкой $4d + 1$ и имеет площадь $(1 + 3k)(1 + k + n + m)$.*

В случае, когда сложность СФЭ больше $2^{n/2}$, где n — число переменных функции, то выгоднее применять другой метод моделирования, описанный в работе [2], который для функций от n переменных даёт площадь порядка 2^n, причём для почти всех булевых функций этот порядок не улучшаем.

2. Идея доказательства теоремы





На рисунке приведена СФЭ в стандартном базисе, реализующая сложение по модулю 2, и КАсЛ, моделирующий эту схему.

Если сложность СФЭ равна k, число входов равно n, а число выходов равно m, то активная область моделирующего КАсЛ будет состоять из $1 + 3k$ столбцов и $1 + n + k + m$ строк. В примере $k = 5$, $n = 2$, $m = 1$.

Входы обозначены маленькими кружками, выходы — квадратиками. Входы и выходы расположены в первом столбце и под каждый из них выделена своя строка. Функциональные элементы расположены в первой строке, причём слева и справа от функциональных элементов расположены ячейки под аргументы функциональных элементов (они прорисованы с нижним подчёркиванием). Получается $3k$ столбцов. Под каждый функциональный элемент выделена отдельная строка, по которой будет передаваться значение на выходе функционального элемента.

Функционирование КАсЛ осуществляется следующим образом:

1. i-й вход подаётся в эфир как $(x_i + 1, 0)$ из ячейки $(0, i)$ (слева от схемы), $i = 1, \ldots, n$. Здесь x_i значение i-го входа.
2. На каждый слой схемы затрачивается 4 такта:
   - **O**: принимает значение $(a, *)$ по горизонтали, ретранслирует $(0, a)$;
   - $\underline{*}$: при приёме значения $(0, b + 1)$ в вертикальный локатор переходит в состояние $\underline{b}$;
   - g_j: читает состояния соседей $\underline{x}$ и $\underline{y}$, отправляет $(0, g_j(x, y) + 1)$ в эфир, здесь g_j — j-й функциональный элемент, $i = 1, \ldots, k$;
   - **I**: принимает $(*, a)$ по вертикали, ретранслирует $(a, 0)$.
3. Ячейка-выход при получении сигнала $(a + 1, *)$, $a \in \{0, 1\}$, в горизонтальный локатор переходит в состояние $\boxed{a}$.

Отсюда получаем, что если в схеме d слоёв (т.е. ее глубина равна d), то задержка КАсЛ будет равна $4d + 1$.

Конвейерность приведённого КАсЛ очевидна, поскольку все сигналы распространяются по своим строкам и столбцам, не мешая друг другу.

Список литературы

[1] Э. Э. Гасанов, "Клеточные автоматы с локаторами как модель устройств с беспроводной связью", *Математические вопросы кибернетики*, Вып 21, ФИЗМАТЛИТ, М, 2023, 5–51. DOI: 10.20948/mvk-2023-5.

[2] Надиров Ч. А., "Сложность реализации почти всех булевых функций клеточными автоматами с локаторами", *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **30**:4 (2026), 224–227.

Статья поступила 28 октября 2026 г.

Modeling Boolean circuits using cellular automata with locators

E. E. Gasanov, G. V. Kalachev, D. A. Bukharina

This paper proposes a method for simulating Boolean circuits using cellular automata with locators (CALs). Given a CFE with k elements and a depth of d, the corresponding CAL that simulates it will have a delay of $4d + 1$ and an area on the order of k^2.

Keywords: Boolean circuits, cellular automata with locators.

References

[1] E. E. Gasanov, "Cellular automata with locators as a model for wireless communication devices", *Matematicheskie voprosy kibernetiki*, Issue 21, FIZMATLIT, M, 2023, 5–51. DOI: 10.20948/mvk-2023-5 (in Russian).

[2] Nadirov Ch. A., "The Complexity of Implementing Almost All Boolean Functions Using Cellular Automata with Locators", *Intelligent systems. Theory and Applications*, **30**:4 (2026), 224–227 (in Russian).

Received on October 28, 2026