Машинный базис по суперпозиции в классе обратимых элементарных функций

И. В. Савицкий*

Приводится новый базис по суперпозиции в классе инъективных функций, принадлежащих вместе со своими обратными обобщению класса $\mathcal{E}^3$ на частичные функции. Базис получен с помощью арифметизации обратимых счётчико-сумматорных машин.

Ключевые слова: обратимые вычисления, базис по суперпозиции, счётчико-сумматорные машины.

1. Введение

Исследования теоретических оснований обратимых вычислений ведутся в двух направлениях. Первое направление предполагает задание функций с помощью абстрактных вычислительных устройств: например, в [5] введена модель обратимой машины Тьюринга и продемонстрирована возможность производить с её помощью вычисления произвольной сложности. В работе автора [4] введён другой тип обратимого абстрактного устройства — счётчико-сумматорные машины, хранящие данные в виде чисел в сумматорах и имеющие автоматически меняющиеся счётчики.

В рамках второго направления изучается возможность построения сложных обратимых функций из простых при помощи суперпозиции и других операций над функциями. Так, в статье [1] строятся базисы по суперпозиции для перестановок из некоторых сложностных классов, включая класс $\mathcal{E}^3$ иерархии Гжегорчика. Этот класс также называют классом функций, элементарных по Кальмару, и он характеризует вычисления, сложность которых выражается степенной башней конечной высоты от длины входа.

В этой работе вводится новый базис по суперпозиции в классе обратимых функций, принадлежащих вместе со своими обратными классу $\mathcal{E}^3$ (точнее, его обобщению на частичные функции). Существование базиса

* *Савицкий Игорь Владимирович* — к.ф.-м.н., асс. каф. математической кибернетики ф-та ВМК МГУ, e-mail: savvvig@gmail.com, ORCID: 0000-0003-3433-8096.

Savitskii Igor Vladimirovich — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Assistant, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Department of Mathematical Cybernetics.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

в этом классе легко вывести из результатов [1], но приводимый здесь базис имеет другой вид: он получен с помощью арифметизации счётчико-сумматорных машин из [4] после ряда их модификаций. Используемый подход следует работам [2, 3], в которых арифметизируются машины для вычисления произвольных (необязательно обратимых) функций. Результат демонстрирует применимость этого подхода к обратимым вычислениям.

2. Базис по суперпозиции

Символом $\mathbb{N}_0$ будем обозначать множество $\{0, 1, 2, \ldots\}$. Там, где это не вызывает недоразумения, будем записывать $\bar{x}$ вместо $x_1, \ldots, x_n$.

Рассматриваем функции $f\colon \mathbb{N}_0^n \to \mathbb{N}_0$, вообще говоря, частичные. Функцию $x - y$ считаем не определённой при $x < y$. Через $\mathrm{rm}(x, y)$ обозначаем остаток от деления x на y (0 при $y = 0$).

Пусть $\mathrm{c}(x, y) = (x + y)^2 + x$. Эта функция инъективным образом нумерует пары чисел. Обобщим нумерацию на наборы из $n \geqslant 2$ элементов:

$$\mathrm{c}^n(x_1, \ldots, x_n) = \mathrm{c}(\mathrm{c}^{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1}),\, x_n).$$

Будем использовать обозначение

$$(f_1(\bar{x}), \ldots, f_m(\bar{x})) \to (g_1(\bar{x}), \ldots, g_l(\bar{x}))$$

для функции h одной переменной такой, что

$$h(\mathrm{c}^m(f_1(\bar{x}), \ldots, f_m(\bar{x}))) = \mathrm{c}^l(g_1(\bar{x}), \ldots, g_l(\bar{x})).$$

Значения h, не заданные этим равенством, считаем не определёнными.

Операция *суперпозиции* включает в себя подстановку функций вместо переменных, перестановку и отождествление переменных.

Функция $f(\bar{x}, y)$ получается из функций $g(\bar{x})$, $h(\bar{x}, y, z)$, $j(\bar{x}, y)$ с помощью операции *ограниченной примитивной рекурсии*, если области определения f и j совпадают и для любых $\bar{x} \in \mathbb{N}_0^n,\ y \in \mathbb{N}_0$ выполнено

$$\begin{cases} f(\bar{x},\, 0) = g(\bar{x}), \\ f(\bar{x},\, y+1) = h(\bar{x},\, y,\, f(\bar{x}, y)), \\ f(\bar{x},\, y) \leqslant j(\bar{x},\, y). \end{cases}$$

В качестве класса элементарных функций будем рассматривать естественное обобщение класса $\mathcal{E}^3$ иерархии Гжегорчика на случай частичных функций. Обозначим $\mathcal{E}^3_{\mathrm{part}}$ замыкание системы $\{0,\ x+1,\ x^y,\ x-y\}$ относительно операций суперпозиции и ограниченной примитивной рекурсии.

У любой инъективной частичной функции $F\colon \mathbb{N}_0^n \to \mathbb{N}_0^m$ существует единственная обратная ей частичная функция $F^{-1}\colon \mathbb{N}_0^m \to \mathbb{N}_0^n$, область определения которой совпадает с областью значений F.

Будем говорить, что инъективная функция $f\colon \mathbb{N}_0^n \to \mathbb{N}_0$ принадлежит классу $\mathcal{E}^3_{\text{part}}$ вместе со своей обратной, если $f(\bar{x})$, $\mathrm{c}^n(f^{-1}(y)) \in \mathcal{E}^3_{\text{part}}$.

Через $x[y]_T$ обозначим y-ю по старшинству цифру (0 соответствует младшей цифре) числа x в позиционной системе счисления с основанием T; при $T = 0, 1$ функция выдаёт 0. Далее $x\{y\}_T = x[\mathrm{rm}(y,\, \mathrm{len}_T(x))]_T$, где $\mathrm{len}_T(x)$ — число цифр в числе x в системе счисления с основанием T при $x > 0$ и $\mathrm{len}_T(0) = 0$. Обозначим

$$x \oplus_{[i]_T} y = (x - x[i]_T \cdot T^i) + \mathrm{rm}(x[i]_T + y,\, T) \cdot T^i.$$

Эта функция осуществляет прибавление (по модулю T) числа y к i-й цифре числа x в системе счисления с основанием T.

Введём функцию $Q(x, p_1, p_2, p_3, T, t)$ при помощи рекурсивной схемы:

$$\begin{cases} Q(x, p_1, p_2, p_3, T,\, 0) = x, \\ Q(x, p_1, p_2, p_3, T,\, t+1) = Q(x, p_1, p_2, p_3, T, t) \oplus_{[p_2\{t\}_T]_T} p_3\{t\}_T, \\ \qquad\qquad \text{если } p_1\{t\}_T \neq p_2\{t\}_T \text{ и } Q(x, p_1, p_2, p_3, T, t)[p_1\{t\}_T]_T = 0, \\ Q(x, p_1, p_2, p_3, T,\, t+1) = Q(x, p_1, p_2, p_3, T, t), \text{ иначе.} \end{cases}$$

Теорема 1. *Класс всех инъективных частичных функций, принадлежащих $\mathcal{E}^3_{\text{part}}$ вместе со своими обратными, совпадает с замыканием относительно суперпозиции системы функций*

$$\begin{gathered} (x, A, p_1, p_2, p_3, T, t) \to (Q(x, p_1, p_2, p_3, T, t), A, p_1, p_2, p_3, T, t), \\ \mathrm{c}(x, y), \quad (A,\, x, x) \to (A,\, x), \quad (x, x) \to x, \\ (A,\, x, y) \to (A,\, y, x), \quad (x, y) \to (y, x), \\ (A,\, x) \to (A,\, x+1), \quad (A,\, x,\, y) \to (A,\, x,\, (x+1)y), \\ (A,\, x+1) \to (A,\, x), \quad (A,\, x,\, (x+1)y) \to (A,\, x,\, y), \\ 2^x, \quad (A,\, 2^x) \to (A,\, x). \end{gathered}$$

Исследование выполнено в рамках государственного задания МГУ имени М. В. Ломоносова.

Список литературы

[1] С. А. Волков, “Конечная порождаемость некоторых групп рекурсивных перестановок”, *Дискретная математика*, **20**:4 (2008), 61–78. DOI: 10.4213/dm1026.

[2] С. А. Волков, “Пример простой квазиуниверсальной функции в классе $\mathcal{E}^2$ иерархии Гжегорчика”, *Дискретная математика*, **18**:4 (2006), 31–44. DOI: 10.4213/dm71.

[3] И. В. Савицкий, “Арифметизация регистровых машин со счетчиками”, *Вестник Московского университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика*, 2020, № 3, 30–42.

[4] И. В. Савицкий, “Обратимые счетчико-сумматорные машины”, *Дискретная математика*, **38**:2 (2026), 67–83. DOI: 10.4213/dm1917.

[5] C. H. Bennett, “Logical reversibility of computation”, *IBM Journal of Research and Development*, **17**:6 (1973), 525–532. DOI: 10.1147/rd.176.0525 .

Статья поступила 23 октября 2026 г.

A machine-based substitution basis in the class of reversible elementary functions

I. V. Savitskii

A new substitution basis is given for the class of injective functions belonging together with their inverses to the generalization of the class $\mathcal{E}^3$ to the case of partial functions. The basis is obtained by arithmetization of reversible counter-summator machines.

Keywords: reversible computation, substitution basis, counter-summator machines.

References

[1] S. A. Volkov, “Finite generability of some groups of recursive permutations”, *Discrete Mathematics and Applications*, **18**:6 (2008), 607–624. DOI: 10.1515/DMA.2008.046.

[2] S. A. Volkov, “An example of a simple quasi-universal function in the class $\mathcal{E}^2$ of the Grzegorczyk hierarchy”, *Discrete Mathematics and Applications*, **16**:5 (2006), 513–526. DOI: 10.1515/156939206779238436.

[3] I. V. Savitskii, “Arithmetization of Register Machines with Counters”, *Moscow University Computational Mathematics and Cybernetics*, **44**:3 (2020), 133–145. DOI: 10.3103/S0278641920030048.

[4] I. V. Savitskii, “Reversible counter-summator machines”, *Discrete Mathematics*, **38**:2 (2026), 67–83 (in Russian. DOI: 10.4213/dm1917).

[5] C. H. Bennett, “Logical reversibility of computation”, *IBM Journal of Research and Development*, **17**:6 (1973), 525–532. DOI: 10.1147/rd.176.0525.

Received on October 23, 2026