О λ-сложности системы из четырех одночленов от трех переменных

В. В. Кочергин*, О. В. Ярыгин‡

Исследуется минимальное число операций умножения и возведения в рациональные степени из интервала $(0; 2)$, достаточное для вычисления произвольной системы из четырех одночленов от трех переменных. Установлено, что эта величина равна $\log_2 D(A) + O(1)$, где A — целочисленная неотрицательная матрица показателей степеней без нулевых строк, а $D(A)$ — максимум модулей всех миноров матрицы A.

Ключевые слова: схемная сложность, задача Пиппенджера, сложность вычислений, системы одночленов, λ-схемы.

В работе исследуется задача Пиппенджера [1], которая заключается в нахождении для системы одночленов

$$f_1 = x_1^{a_{11}} x_2^{a_{12}} \dots x_q^{a_{1q}}, \quad f_2 = x_1^{a_{21}} x_2^{a_{22}} \dots x_q^{a_{2q}}, \quad \dots, \quad f_p = x_1^{a_{p1}} x_2^{a_{p2}} \dots x_q^{a_{pq}}$$

сложности $l(f_1, f_2, \dots, f_p)$ их совместного вычисления, под которой понимается минимально возможное число операций умножения, достаточное для вычисления по переменным $x_1, x_2, \dots, x_q$ одночленов $f_1, f_2, \dots f_p$. Набор одночленов $f_1, f_2, \dots f_p$ однозначно задается целочисленной матрицей $A = (a_{ij})$ размера $p \times q$ с неотрицательными коэффициентами без нулевых строк, и поэтому вместо сложности реализации системы одночленов $f_1, f_2, \dots f_p$ можно говорить о *сложности* $l(A)$ *матрицы* A.

Как следует из [2], нахождение точного значения величины $l(A)$ в общем случае — NP-трудная задача. Однако оказалось, что установить даже асимптотику роста сложности $l(A)$ при условии $\max\{a_{ij}\} \to \infty$ в общем случае также чрезвычайно трудно. К настоящему времени асимптотика последовательно установлена [3–5] только для последовательностей матриц размеров 2×2, $p \times 2$, $2 \times q$ и 3×3. Во всех указанных случаях асимптотика имеет вид

$$l(A) \sim \log_2 D(A),$$

* *Кочергин Вадим Васильевич* — зав. каф. дискретной математики мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: vvkoch@yandex.ru.

Kochergin Vadim Vasil'evich — Head of Chair of Discrete Mathematics, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics.

‡ *Ярыгин Олег Витальевич* — старший менеджер продукта, АО «Райффайзенбанк», e-mail: oyarygin.oleg@yandex.ru.

Yarygin Oleg Vital'evich — Senior Product Manager, Raiffeisenbank JSC.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

где $D(A)$ — максимум абсолютных величин всех миноров матрицы A, от элементов матрицы до миноров порядка $\min(p,q) \times \min(p,q)$. При этом известен [5] пример последовательности матриц A_n размера 4×4, для которой верно асимптотическое равенство $l(A_n) \sim \frac{4}{3} \log_2 D(A_n)$.

К сожалению, за последние почти 20 лет существенных продвижений в исследовании задачи Пиппенджера практически не было. До сих пор даже не выдвинуто правдоподобной гипотезы об асимптотике роста сложности квадратных матриц порядка 4.

В настоящей работе изучается случай матриц размера 4×3. В качестве вычислительной модели рассматриваются λ-схемы (см., например, [3, 5]), которые наряду с операцией умножения допускают использование операции возведения в любые рациональные степени из интервала $(0; 2)$. Соответственно, наименьшее число операций этих двух типов, достаточное для вычисления системы одночленов, задаваемых матрицей A, обозначается через $\lambda(A)$.

Ключевым свойством вычислений посредством λ-схем является полная определенность со сложностью возведения в степень: в то время как в классической модели при возведении в степень n (в аддитивной постановке — при построении аддитивной цепочки для n) минимально возможное число операций оценивается величиной

$$\log_2 n + \frac{\log_2 n}{\log_2 \log_2 n}(1 + o(1)),$$

причем для почти всех значений n эта оценка неулучшаема — см., например, [6–8], — для вычисления λ-схемами справедливо простое равенство $\lambda(x^n) = \lceil \log_2 n \rceil$. Учитывая, что, как показано в [3, 5], при слабых ограничениях λ-схему можно преобразовать в схему из умножений без асимптотического увеличения сложности, модель λ-схем позволяет при исследовании сложности реализации систем одночленов выделить «содержательную» составляющую вычислений, не отвлекаясь на «техническую».

Теорема. *Существует абсолютная константа C, такая, что для любой целочисленной неотрицательной матрицы A размера 4×3 без нулевых строк справедливы неравенства*

$$\log_2 D(A) \le \lambda(A) \le \log_2 D(A) + C.$$

Нижняя оценка доказывается аналогично универсальной нижней оценке из [5] и в отличие от верхней не представляет особого интереса. Доказательство верхней оценки базируется на существенном развитии методов из [4] и включает в себя ряд технических утверждений, в частности, леммы с оценкой сложности через произведение элементов, находящихся

в разных строках и столбцах, и с оценками сложности реализации матриц с нулем в каждой строке, леммы, основанные на масштабировании опорного одночлена, использовании соображений двойственности, а также на возможности сведения задачи для произвольной матрицы к задаче для разреженной матрицы.

Список литературы

[1] Pippenger N., "On evaluation of powers and monomials", *SIAM Journal on Computing*, **9**:2 (1980), 230–250. DOI: 10.1137/0209022.

[2] Downey P., Leong B., Sethi R., "Computing sequences with addition chains", *SIAM Journal on Computing*, **10** (1981), 638–646. DOI: 10.1137/0210047.

[3] Кочергин В. В., "О сложности вычисления системы из трех одночленов от трех переменных", *Математические вопросы кибернетики*, **15**, Физматлит, Москва, 2006, 79–155.

[4] Кочергин В. В., "Простое доказательство верхней оценки сложности вычисления трех одночленов трех переменных", *Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика*, 2019, № 2, 3–8.

[5] Кочергин В. В., "Задачи Беллмана, Кнута, Лупанова, Пиппенджера и их вариации как обобщения задачи об аддитивных цепочках", *Математические вопросы кибернетики*, **20**, Физматлит, Москва, 2022, 119–256. DOI: 10.20948/mvk-2022-119.

[6] Brauer A., "On addition chains", *Bulletin of the American Mathematical Society*, **45** (1939), 736–739. DOI: 10.1090/S0002-9904-1939-07068-7.

[7] Erdős P., "Remarks on number theory, III: On addition chains", *Acta Arithmetica*, **6** (1960), 77–81. DOI: 10.4064/aa-6-1-77-81.

[8] Кнут Д. Е., *Искусство программирования*, 3-е изд., **2**, Издательский дом «Вильямс», Москва, 2000 .

Статья поступила 24 октября 2026 г.

On the λ-complexity of a system of four monomials in three variables

V. V. Kochergin, O. V. Yarygin

We study the minimum number of multiplications and exponentiations to rational powers in the interval $(0, 2)$ sufficient to compute an arbitrary system of four monomials in three variables. This number is shown to be $\log_2 D(A) + O(1)$, where A is the nonnegative integer matrix of exponents with no zero rows, and $D(A)$ is the maximum absolute value of all minors of A.

Keywords: circuit complexity, Pippenger's problem, computational complexity, systems of monomials, λ-circuits.

References

[1] Pippenger N., "On evaluation of powers and monomials", *SIAM Journal on Computing*, **9**:2 (1980), 230–250. DOI: 10.1137/0209022.

[2] Downey P., Leong B., Sethi R., "Computing sequences with addition chains", *SIAM Journal on Computing*, **10** (1981), 638–646. DOI: 10.1137/0210047.

[3] Kochergin V. V., "On the complexity of computing a system of three monomials in three variables", *Mathematical Problems of Cybernetics*, **15**, Fizmatlit, Moscow, 2006, 79–155, (In Russian).

[4] Kochergin V. V., "A simple proof for the upper bound of the computational complexity of three monomials in three variables", *Moscow University Mathematics Bulletin*, **74**:2 (2019), 43–48. DOI: 10.3103/S0027132219020013.

[5] Kochergin V. V., "Problems of Bellman, Knuth, Lupanov, Pippenger and their variations as generalizations of the addition chain problem", *Mathematical Problems of Cybernetics*, **20**, Fizmatlit, Moscow, 2022, 119–256. DOI: 10.20948/mvk-2022-119, (In Russian).

[6] Brauer A., "On addition chains", *Bulletin of the American Mathematical Society*, **45** (1939), 736–739. DOI: 10.1090/S0002-9904-1939-07068-7.

[7] Erdős P., "Remarks on number theory, III: On addition chains", *Acta Arithmetica*, **6** (1960), 77–81. DOI: 10.4064/aa-6-1-77-81.

[8] Knuth D. E., *The Art of Computer Programming*, 3rd ed., **2**, Vil'yams, Moscow, 2000, (In Russian).

Received on October 24, 2026