О числе вершин выпуклого многоугольника, попадающих на прямую Брезенхема

А. А. Касай*

В статье исследуется вопрос о максимальном числе вершин выпуклого целочисленного многоугольника, которые могут одновременно оказаться на прямой Брезенхема при её параллельном переносе вдоль рационального вектора. В отличие от классической задачи линейного программирования с непостоянной линейной целевой функцией, где экстремум достигается не более чем в двух вершинах, в дискретном случае число вершин, одновременно лежащих на прямой Брезенхема, может быть сколь угодно большим.

Ключевые слова: прямая Брезенхема, выпуклая оболочка, целочисленная решётка, рациональный тангенс.

1. Введение и формулировка результата

Известно, что в задаче линейного программирования выпуклый многоугольник задаёт область, в которой ищется экстремум целевой функции. Если линейная целевая функция непостоянна на этом многоугольнике, экстремум достигается в вершинах выпуклого многоугольника, причём, как известно, не более чем в двух вершинах.

Если перенести целевую прямую на целочисленную решётку, заменяя её прямым дискретным аналогом, возникает естественный вопрос: сколько вершин выпуклого целочисленного многоугольника может одновременно лежать на прямой Брезенхема при её параллельном переносе? В настоящей работе показано, что таких точек может быть неограниченное количество, что демонстрирует принципиальное отличие дискретной постановки от классической.

Прямой Брезенхема назовём дискретное приближение евклидовой прямой $y = kx + b$ (где $k = p/q$ — несократимая дробь, $p \geq q$) в целочисленной решётке $\mathbb{Z}^2$, построенное по принципу алгоритма Брезенхема [1]: прямая разбивается на циклы, состоящие из q вертикальных ступеней,

* *Касай Анна Алексеевна* — студ. каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: anna.kasai@math.msu.ru, ORCID: 0009-0002-2715-5267.

Kasai Anna Alekseevna — Student of Department of Mathematical Theory of Intelligent Systems, Faculty of Mechanics and Mathematics, Moscow State University.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

каждая из которых имеет высоту $m = \lfloor p/q \rfloor$ или $m + 1$, причём ровно $p \bmod q$ ступеней имеют высоту $m + 1$, а их расположение определяется условием $x_i = \lceil \frac{1}{k} y_i - \frac{b}{k} \rceil$, $i \in \mathbb{Z}$. Здесь $[\cdot]$ обозначает округление до ближайшего целого, при котором полуцелое значение округляется вверх: $[x] = \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor$ для всех $x \in \mathbb{R}$. Случай $p < q$ сводится к рассмотренному переобозначением осей.

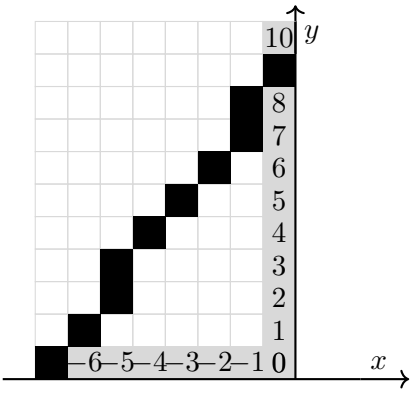


Рис. 1: Пример прямой Брезенхема, где $p = 9$, $q = 7$ (прямая $y = \frac{9}{7}x + 9$)

Определим *функцию* ν, заданную на множестве наклонов прямых: для невертикальной прямой с тангенсом $k = p/q$ (несократимая дробь) значение $\nu(k)$ есть наибольшее число вершин выпуклого многоугольника $G \subset \mathbb{R}^2$ с вершинами в $\mathbb{Z}^2$, способных одновременно попасть на прямую Брезенхема с тангенсом k при её параллельном переносе; для вертикального направления (тангенс не определён) полагаем $\nu(\infty) = 2$, где символ ∞ обозначает вертикальный наклон.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть* $m \in \mathbb{N}$.

1. *Если тангенс прямой равен* m, *то* $\nu(m) = |2m|$;
2. *Для* m *существует такая последовательность тангенсов* $\{k_i\}$, *где* $k_i \in (m, m + 1]$, *что* $\lim\limits_{k_i \to m} \nu(k_i) = \infty$;
3. *Если прямая вертикальная или горизонтальная (тангенс* k *прямой не определён или* $k = 0$ *соответственно), то* $\nu(k) = 2$.

Замечание 1. Так как все симметрично, другие тангенсы получаются с помощью поворотов и отражений.

Автор выражает искреннюю благодарность научному руководителю д.ф.-м.н., профессору Э. Э. Гасанову за постановку задачи и научное руководство, внимание к работе и всестороннюю поддержку.

2. Идея доказательства теоремы

1)Будем называть точки выпуклого многоугольника, отмеченные на прямой, *цепочкой*. Рассматриваем самую длинную «цепочку». В ней обязательно найдутся две подряд идущие точки, соединённые прямой с тангенсом m; эти две точки считаем «началом цепочки». Из выпуклости оболочки следует монотонность наклонов: при движении вверх от начала цепочки тангенсы должны уменьшаться, а при движении вниз — увеличиваться. Нумеруем клетки в каждом блоке числами $1, \ldots, m$. Тогда в нижней половине цепочки каждый номер может встретиться не более одного раза: если сейчас стоит номер n, то следующим можно взять только номер больше n, иначе тангенс не увеличится. Аналогично, в верхней половине. Значит, всего точек не больше $2m$, то есть $\nu(m) \leq 2m$.

Оценка достигается: нужно выбирать номера клеток по порядку, но пропускать блоки так, чтобы тангенс отдалялся от m. При движении вверх пропускаем $m-2, m-3, \ldots, 0$ блоков, аналогично вниз. Так отмечаются $m-1$ точек сверху, $m-1$ снизу и ещё 2 в «начале», итого $2m$.

2)Пусть $m > 0$, приведем последовательность тангенсов $\{k_i\}$, где $k_i \in (m, m+1]$ и для каждого k_i покажем пример построения точек на прямой («цепочки») (не обязательно максимальной по длине) так, что количество точек будет стремиться к бесконечности. Тогда и $\nu \to \infty$.

Возьмем $k_i = m + 1/(i+1)$, то есть i блоков длины m и один блок длины $m+1$. Очевидно, $k_i \to m$.

Будем изображать прямые схематично и пронумеруем короткие блоки парой чисел (a, b), указывающей на номер цикла и номер блока в нем:

$$\underset{(0,1)}{m}\ \underset{(0,2)}{m}\ \ldots\ \underset{(0,i)}{m}\ (m+1)\ \underset{(1,1)}{m}\ \underset{(1,2)}{m}\ \ldots\ \underset{(1,i)}{m}\ (m+1)\ \underset{(2,1)}{m}\ \ldots\ \underset{(2,i)}{m}\ (m+1)\ldots$$

При построении примеров достаточно будет отмечать лишь самые нижние точки, поэтому далее словосочетание «отмеченный блок» подразумевает отмеченную в этом блоке точку с номером m. Будем отмечать блоки $(0,1), (1,1), (2,2), (3,4), (4,7)...(l, (l^2-l+2)/2)$, пока вторая координата не превосходит i. Тогда тангенсы между отмеченными точками будут соответственно равны $k_i = m+1/(i+1) > m+1/(i+2) > m+\frac{1}{i+3} > \cdots > m+\frac{1}{i+l}$. Очевидно, что при стремлении $i \to \infty$ получим также и $l \to \infty$, а значит, и количество отмеченных точек для тангенса k_i будет стремиться к бесконечности.

3) Очевидно.

Список литературы

[1] Д. Роджерс, *Алгоритмические основы машинной графики*, Мир, М., 1989 .

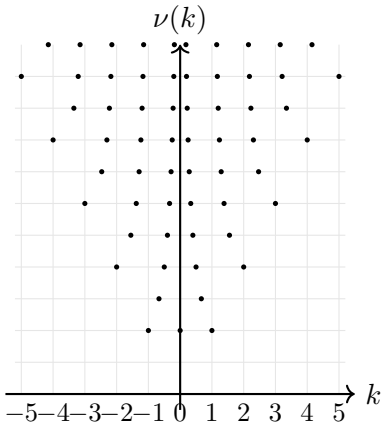


Рис. 2: Схематичное изображение поведения нижней оценки $\nu(k)$

Статья поступила 6 ноября 2026 г.

On the number of vertices of a convex polygon that lie on the Bresenham line.

A. A. Kasai

The article examines the question of the maximum number of vertices of a convex integer polygon that can simultaneously lie on a Bresenham line when it is translated parallel to a rational vector. Unlike the classical linear programming problem with a non-constant linear objective function, where the extremum is achieved in no more than two vertices, in the discrete case the number of vertices simultaneously lying on a Bresenham line can be arbitrarily large.

Keywords: Bresenham's line algorithm, convex hull, integer lattice, rational tangent .

References

[1] D. Rogers, *Algorithmic foundations of computer graphics*, Mir, Moscow, 1989 (in Russian).

Received on November 6, 2026