Оценки активности схем из функциональных элементов, реализующих булевы операторы

Г. В. Калачев*

Для схем из функциональных элементов в стандартном базисе рассматриваются две меры активности: мощность — число элементов с единицей на выходе и P-активность — число элементов с единицей на входе или выходе. Для первой меры найден порядок функции Шеннона $\Theta(n + m \log n)$ для операторов с n входами и m выходами, $1 \leq m \leq 2^n$. Для второй получена нижняя оценка $\Omega(n \log n)$ для почти всех булевых функций. Оба результата справедливы для средней и максимальной мер.

Ключевые слова: булевы функции, схемы из функциональных элементов, мощность схем, активность схем, функция Шеннона.

1. Введение и определения

Мощность схем из функциональных элементов (СФЭ) исследуется начиная с работы М. Н. Вайнцвайга [1]. Для схемы Σ обозначим через $V(\Sigma)$ множество её функциональных элементов, а через $\varphi_v(x)$ — значение на выходе элемента $v \in V(\Sigma)$ при входном наборе $x \in \{0,1\}^n$. *Мощность* схемы Σ *на наборе* x определяется равенством

$$E(\Sigma, x) = \sum_{v \in V(\Sigma)} \varphi_v(x).$$

Заметим, что входные вершины в сумму для E не входят. Эти обозначения используются, в частности, в [3].

Другую меру — *P-активность* — исследовал О. М. Касим-Заде [2]. Пусть $\mathrm{In}(v)$ — список источников сигналов на входах элемента v, включая входы схемы. Тогда

$$P(\Sigma, x) = \sum_{v \in V(\Sigma)} \mathbf{1}\{\varphi_v(x) = 1 \text{ или } \exists u \in \mathrm{In}(v) : \varphi_u(x) = 1\},$$

* *Калачев Глеб Вячеславович* — канд. физ.-мат. наук, с. н. с. лаборатории проблем теоретической кибернетики мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: gleb.kalachev@yandex.ru, ORCID: 0000-0003-2695-3179.

Kalachev Gleb Vyacheslavovich — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior Researcher, Laboratory of Problems of Theoretical Cybernetics, Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

где для входной вершины $u = x_i$ полагаем $\varphi_u(x) = x_i$. Для $M \in \{E, P\}$ определим максимальную и среднюю меры схемы:

$$\widehat{M}(\Sigma) = \max_{x\in\{0,1\}^n} M(\Sigma, x), \qquad M(\Sigma) = 2^{-n} \sum_{x\in\{0,1\}^n} M(\Sigma, x).$$

Далее все схемы мы рассматриваем в стандартном базисе $\{\&, \vee, \neg\}$. Для булева оператора $F\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}^m$ положим, при $M \in \{\widehat{P}, P, \widehat{E}, E\}$,

$$M(F) = \min\bigl\{M(\Sigma) \;\big|\; \Sigma \text{ реализует } F\bigr\}, \quad M(n,m) = \max_{F:\{0,1\}^n\to\{0,1\}^m} M(F).$$

При $m = 1$ в [3] получена оценка $\widehat{E}(\Sigma_f) \le (3 + o(1))n$ одновременно с асимптотически оптимальной сложностью $L(\Sigma_f) \le (1 + o(1))2^n/n$. Квадратичная верхняя оценка активности восходит к А. П. Горяшко [4], её применимость к P-активности обоснована в [2].

2. Результаты

Все логарифмы далее двоичные. Первый результат определяет порядок мощности реализации булевых операторов.

Теорема 1. *Равномерно по* $1 \le m \le 2^{2^n}$ *при* $n \to \infty$ *выполнено*

$$E(n,m) = \Theta\bigl(n + m\log n'\bigr), \qquad \widehat{E}(n,m) = \Theta\bigl(n + m\log n'\bigr),$$

где $n' := \max(2, n - \log\log(m+1))$.

В частности, при $1 \le m \le n/\log n$ мера E растёт линейно по n, а при $n/\log n \le m \le 2^{2^{o(n)}}$ — как $\Theta(m\log n)$.

Второй результат относится к P-активности.

Теорема 2. *Равномерно по* $1 \le m \le 2^{2^n}$ *при* $n \to \infty$ *выполнено*

$$\Omega(n\log n + m\log n') \le P(n,m) \le \widehat{P}(n,m) \le O(n^2 + m\log n'),$$

где $n' := \max(2, n - \log\log(m+1))$.

Дополнительная технически сложная часть, не сводящаяся к теореме 1, здесь заключается в нижней оценке $\Omega(n\log n)$ для булевых функций, всё остальное следует из теоремы 1 и квадратичной конструкции [2, 4]. В обеих теоремах нижняя оценка выполнена для почти всех операторов, то есть доля операторов, где она не выполнена, стремится к 0 при $n \to \infty$.

В частности, при $n^2/\log n \le m \le 2^{2^{o(n)}}$ имеем

$$P(n,m) = \Theta(m \log n), \qquad \widehat{P}(n,m) = \Theta(m \log n).$$

При этом при $m = 1$ теорема 2 даёт лишь

$$\Omega(n \log n) \le P(n,1) \le \widehat{P}(n,1) \le O(n^2).$$

Таким образом, теорема 2 даёт улучшение нижней оценки по сравнению с [2], однако порядок функции Шеннона для P-активности булевых функций остаётся открытым вопросом.

Для получения нижних оценок использовался метод расслоения, который в [5, разд. 4.2] применялся к мощности плоских схем: оценивается среднее число единиц на разрезах и суммируются вклады непересекающихся границ. Для обеих мер активности для булевых операторов используются разрезы по расстоянию до выходов, а для P-активности дополнительно — по расстоянию от входов для преобразованной схемы.

Заметим, что оценки из теоремы 2 переносятся также и на другие эквивалентные по порядку меры активности, например можно считать активность выходов элементов с учётом ветвления, число активных проводов или число элементов с активным входом — функция Шеннона таких мер активности будет равна по порядку P-активности.

Код доказательства теорем 1 и 2 в системе Lean 4 доступен по ссылке: `https://github.com/KalachevGleb/circuit-activity-lean/tree/v1.0`.

Об использовании инструментов ИИ

При работе над техническими деталями доказательств использовались модели GPT-6 Astra и GPT-6.1 Sol. Также использовалась модель Claude Opus 5.5 в составе инструмента Claude Code для написания кода на Lean для формальной верификации доказательств. Автор несёт полную ответственность за содержание статьи.

Список литературы

[1] М. Н. Вайнцвайг, “О мощности схем из функциональных элементов”, *Докл. АН СССР*, **139**:2 (1961), 320–323.

[2] О. М. Касим-Заде, “Об одной мере активности схем из функциональных элементов”, *Математические вопросы кибернетики*, Вып. 4, Наука, М., 1992, 218–228.

[3] С. А. Ложкин, М. С. Шуплецов, “О динамической активности схем из функциональных элементов и построении асимптотически оптимальных по сложности схем с линейной динамической активностью”, *Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки*, **156**:3 (2014), 84–97.

[4] А. П. Горяшко, "Энергетические оценки сложности функционирования логических сетей", *Изв. АН СССР. Сер. Техническая кибернетика*, 1969, № 2, 86–95.

[5] Г. В. Калачев, "Нижние оценки мощности плоских схем, реализующих частичные булевы операторы", *Интеллектуальные системы*, **18**:2 (2014), 279–322.

Статья поступила 26 октября 2026 г.

Bounds on the Activity of Boolean Circuits Implementing Boolean Operators

G. V. Kalachev

We consider two activity measures for Boolean circuits over the standard basis: the power (the number of gates whose output is one) and the P-activity (the number of gates having one on an input or on the output). For the first measure, the Shannon function for operators with n inputs and m outputs is shown to have order $\Theta(n + m \log n)$ for $1 \leq m \leq 2^n$. For the second measure, we obtain an $\Omega(n \log n)$ lower bound for almost all Boolean functions. Both results hold for the average and the maximum measures.

Keywords: Boolean functions, Boolean circuits, circuit power, circuit activity, Shannon function.

References

[1] M. N. Vaintsvaig, "On the power of networks of functional elements", *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **139**:2 (1961), 320–323 (In Russian).

[2] O. M. Kasim-Zade, "On a measure of the activeness of circuits made of functional elements", *Mathematical Problems of Cybernetics*, Issue 4, Nauka, Moscow, 1992, 218–228 (In Russian).

[3] S. A. Lozhkin, M. S. Shupletsov, "On the dynamic activity of Boolean circuits and synthesis of circuits with asymptotically optimal complexity and linear dynamic activity", *Uchen. Zap. Kazan. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, **156**:3 (2014), 84–97 (In Russian).

[4] A. P. Goryashko, "Energy estimates of the complexity of functioning of logical networks", *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Tekhn. Kibernet.*, 1969, № 2, 86–95 (In Russian).

[5] G. V. Kalachev, "Lower bounds for the power of planar circuits implementing partial Boolean operators", *Intellektual'nye Sistemy*, **18**:2 (2014), 279–322 (In Russian).

Received on October 26, 2026