Алгоритм стягивания путей для задачи поиска простого пути заданной длины

М. И. Ващенко*, А. А. Мастихина‡

В работе рассматривается задача поиска простого пути заданной длины между заданными вершинами в связном неориентированном взвешенном графе без кратных ребер и петель, все веса ребер которого являются положительными числами. Данная задача возникает при планировании транспортных маршрутов с гарантированной задержкой или при анализе графов, возникающих в микробиологии. Авторами предложен новый алгоритм для решения задачи поиска простого пути заданной длины в графе. Разработанный алгоритм основан на постепенном преобразовании графа и отсечении простых путей, которые не могут являться частью искомого простого пути. В работе представлены оценки временной и пространственной сложности нового алгоритма в среднем и худшем случаях, а также представлены результаты численных экспериментов по сравнению данного алгоритма с модифицированным алгоритмом Йена.

Ключевые слова: алгоритм Йена, поиск простых путей, случайный граф Эрдеша-Реньи.

1. Введение

В работе рассматривается задача поиска простого пути заданной длины между заданными вершинами в неориентированном связном взвешенном графе $G = (V, E)$ без кратных ребер и петель, все веса ребер которого являются положительными числами. Данная задача имеет ряд приложений, например, она может быть использована для планирования транспортных маршрутов с гарантированной задержкой или при анализе графов, возникающих в микробиологии [1].

Ващенко Максим Игоревич — студент магистратуры, МГТУ им. Н. Э. Баумана, e-mail: maksim.vashchenko.5669@mail.ru, ORCID: 0009-0005-4328-4431.

Vaschenko Maksim Igorevich — Master's student, Bauman Moscow State Technical University.

‡*Мастихина Анна Антоновна* — канд. физ.-мат. наук, доцент каф. ФН1 "Высшая математика", МГТУ им. Н. Э. Баумана, e-mail: anmast@bmstu.ru, ORCID: 0009-0008-5025-5518.

Mastikhina Anna Antonovna — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Department of FS1, "Higher mathematics", Bauman Moscow State Technical University.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

Для решения рассматриваемой задачи можно использовать некоторые существующие алгоритмы, а именно небольшую модификацию классического алгоритма Йена [2] и алгоритма Йена, основанного на двунаправленном алгоритме Дейкстры. Главным недостатком этих алгоритмов является то, что они полностью переборные, то есть в худшем случае им потребуется перебрать все простые пути между заданными вершинами, которых может оказаться очень много. Для устранения этого недостатка был разработан алгоритм стягивания путей.

2. Основная идея алгоритма

Предположим, что мы ищем простой путь длины w_{find} между вершинами v_{start} и v_{end} и на некотором шаге алгоритма стягивания путей мы обнаружили простой путь длины $w_1 > w_{find}$ между вершинами, отличными от заданных. Очевидно, что найденный простой путь не может быть частью искомого простого пути, поскольку все веса ребер в графе являются положительными числами и $w_1 > w_{find}$, поэтому данный простой путь должен быть "удален"из графа.

В ходе работы алгоритма на каждой итерации выбирается вершина с наименьшей степенью среди вершин, смежных с v_{start} или v_{end} и отличных от них. Затем рассматриваются все простые пути между вершинами, смежными с рассматриваемой. Из графа удаляется рассматриваемая вершина и инцидентные ей ребра, на основе которых в графе проводятся новые, но только те, которые могут быть частью искомого простого пути, с сохранением информации об изначальной структуре графа. Алгоритм прекратит работу в тот момент, когда будет проведено новое ребро между v_{start} и v_{end}, на основе которого будет восстановлен простой путь в исходном графе.

В случае, когда искомого простого пути нет в графе, граф на одной из итераций потеряет связность, а именно либо v_{start}, либо v_{end} окажется в другой компоненте связности, и алгоритм прекратит свою работу.

3. Оценки сложности разработанного алгоритма

Оценки для временной и пространственной сложности [3] алгоритма стягивания путей в худшем и среднем случае представлены в Таблице 1. Средний случай рассматривался для случайного графа Эрдеша-Реньи [4].

Таблица 1: Сложности рассматриваемых алгоритмов.

Алгоритм Йена	**Новый алгоритм**
Худший случай:	Худший случай:
$T = O\big(2^{\lvert E\rvert-\lvert V\rvert+2}\lvert V\rvert^3\big)$;	$T = O\big(\lvert V\rvert^3(\lvert V\rvert!)^2\big)$;
$S = O\big(2^{\lvert E\rvert-\lvert V\rvert+2}\lvert V\rvert^2\big)$.	$S = O\big(\lvert V\rvert\,\lvert V\rvert!\big)$.
Средний (разреженный):	Средний (разреженный):
$T = O\big(2^{\lvert E\rvert-\lvert V\rvert+2}\lvert V\rvert(\log\lvert V\rvert)^2\big)$;	$T = O\big(\lvert V\rvert^2\big)$;
$S = O\big(2^{\lvert E\rvert-\lvert V\rvert+2}\lvert V\rvert\log\lvert V\rvert\big)$.	$S = O\big(\lvert V\rvert^2\big)$.
Средний (плотный):	Средний (плотный):
$T = O\big(2^{\lvert E\rvert-\lvert V\rvert+2}\lvert V\rvert^2\big)$;	$T = O\big(\lvert V\rvert^2\lvert V\rvert!\big)$;
$S = O\big(2^{\lvert E\rvert-\lvert V\rvert+2}\lvert V\rvert^2\big)$.	$S = O\big(\lvert V\rvert\,\lvert V\rvert!\big)$.

4. Результаты численных экспериментов

Численные эксперименты были проведены на языке Python на наборах случайных графов Эрдеша-Реньи и подграфах графов из прикладных задач. Также были проведены численные эксперименты для случая, когда в графе нет простого пути заданной длины между заданными вершинами. В Таблице 2 представлены результаты для подграфов графа дорог Нью-Йорка. $|E|_{cp}$ - среднее число ребер в подграфе, Δ - отношение числа случаев, в которых алгоритм Йена оказался быстрее нового алгоритма, к общему количеству случаев (всего проводилось 50 экспериментов).

Таблица 2: Среднее время работы на подграфах графа дорог Нью-Йорка.

$\lvert V\rvert$	$\lvert E\rvert_{cp}$	Алгоритм Йена, с	Новый алгоритм, с	Δ, %
2500	3127	1139,76	142,39	28

5. Заключение

Таким образом, был разработан новый алгоритм для задачи поиска простого пути заданной длины между заданными вершинами, который в некоторых случаях оказался эффективнее модифицированных вариаций алгоритма Йена.

Список литературы

[1] Scott J., Ideker T., Karp R. M., Sharan R., “Efficient Algorithms for Detecting Signaling Pathways in Protein Interaction Networks”, *Research in Computational Molecular Biology*, Berlin, Heidelberg, 2005, 1–13. DOI: http://dx.doi.org/10.1007/11415770_1.

[2] Yen J. Y., "Finding the k-Shortest Loopless Paths in a Network", *Management Science*, **17**:11 (1971), 712–716. DOI: http://dx.doi.org/10.1287/mnsc.17.11.712.

[3] Абрамов С. А., *Лекции о сложности алгоритмов*, МЦНМО, М., 2009, 256 с.

[4] Райгородский А. М., *Модели случайных графов*, МЦНМО, М., 2011, 136 с.

Статья поступила 9 ноября 2026 г.

The path contraction algorithm for the problem of finding a simple path of a given length

M. I. Vaschenko, A. A. Mastikhina

The paper considers the problem of finding a simple path of a given length between specified vertices in a connected undirected weighted graph without multiple edges and loops, all edge weights of which are positive numbers. This problem arises when planning transport routes with guaranteed delay or when analyzing graphs that arise in microbiology. The authors propose a new algorithm for solving the problem of finding a simple path of a given length in a graph. The developed algorithm is based on the gradual transformation of the graph and the elimination of simple paths that cannot be part of the sought-after simple path. The paper presents estimates of the time and space complexity of the new algorithm in the average and worst cases, and also presents the results of numerical experiments comparing this algorithm with the modified Yen's algorithm.

Keywords: Yen's algorithm, simple path search, Erdős–Rényi random graph.

References

[1] Scott J., Ideker T., Karp R. M., Sharan R., "Efficient Algorithms for Detecting Signaling Pathways in Protein Interaction Networks", *Research in Computational Molecular Biology*, Berlin, Heidelberg, 2005, 1–13. DOI: http://dx.doi.org/10.1007/11415770_1.

[2] Yen J. Y., "Finding the k-Shortest Loopless Paths in a Network", *Management Science*, **17**:11 (1971), 712–716. DOI: http://dx.doi.org/10.1287/mnsc.17.11.712.

[3] Abramov S. A., *Lectures on the Complexity of Algorithms*, MCCME, Moscow, 2009 (In Russian), 256 pp.

[4] Raigorodsky A. M., *Models of Random Graphs*, MCCME, Moscow, 2011 (In Russian), 136 pp.

Received on November 9, 2026