Обобщение одного класса полиномиальных форм и его свойства

А. В. Бухман*

В работе предлагается обобщение CRMP полиномиальных форм — обобщённых полиномиальных форм, в которых любые два монома различаются набором входящих в них переменных. Вводится понятие CRMP полиномиальной формы, поляризованной по вектору $\alpha \in \{-1, 0, 1\}^n$. Описаны некоторые свойства таких форм.

Ключевые слова: булевы функции, полиномиальные формы, CRMP формы.

Определение. Обобщённой полиномиальной формой назовём сумму по модулю два мономов. Моном — это произведение различных переменных или их отрицаний (либо константа 1).

Определение. Длиной обобщённой полиномиальной формы будем называть количество слагаемых в ней. Под сложностью обобщённой полиномиальной формы будем понимать её длину.

Сложность булевых функций в классе обобщённых полиномиальных форм изучалась, например, в работах [1, 2]: в работе [1] получена верхняя оценка функции Шеннона длины обобщённых полиномиальных форм булевых функций, а в работе [2] аналогичные вопросы рассмотрены для функций k-значной логики и найден порядок роста соответствующей функции Шеннона. Тем не менее построение минимальных обобщённых полиномиальных форм для конкретных функций в общем случае — сложная задача, поэтому рассматривают обобщённые полиномиальные формы с ограничениями на слагаемые; например, в работе [3] рассматриваются поляризованные полиномиальные формы.

В данной работе рассмотрим один вид полиномиальных форм, введённый в статье [4], который обладает хорошими свойствами с точки зрения синтеза.

Определение. CRMP полиномиальная форма — это такая обобщённая полиномиальная форма, что любые два монома различаются набором входящих в них переменных.

* *Бухман Антон Владимирович* — н.с. каф. мат. киб. ВМК МГУ, e-mail: antvbx@gmail.com, ORCID: 0000-0002-5242-3908.

Bukhman Anton Vladimirovich — Researcher, Department of Mathematical Cybernetics, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Moscow State University.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

Такие полиномиальные формы обладают рядом полезных свойств с точки зрения приложений, например, задача выполнимости на них разрешима за полиномиальное время, также в работе [4] приведены эффективные алгоритмы для их минимизации.

В данной заметке предлагается обобщение CRMP полиномиальных форм.

Пусть $\alpha \in \{-1, 0, 1\}^n$, введём оператор Pr^α, который действует на мономы от n переменных, результатом его воздействия будет множество переменных, причём если $\alpha_i = 0$, то x_i входит в это множество тогда и только тогда, когда x_i входит в моном с отрицанием или без отрицания; если $\alpha_i = 1$, то x_i входит в это множество тогда и только тогда, когда x_i входит в моном с отрицанием или не входит в моном; если $\alpha_i = -1$, то x_i входит в это множество тогда и только тогда, когда x_i входит в моном без отрицания или не входит в моном.

Определение. Пусть $\alpha \in \{-1, 0, 1\}^n$. CRMP полиномиальной формой, поляризованной по вектору α, назовём такую обобщённую полиномиальную форму, что для любых двух её мономов K_1, K_2 справедливо $Pr^\alpha(K_1) \neq Pr^\alpha(K_2)$.

При $\alpha = (0, \ldots, 0)$ получаем определение обычной CRMP полиномиальной формы.

Научная новизна работы состоит во введении нового класса полиномиальных форм — CRMP полиномиальных форм, поляризованных по вектору $\alpha \in \{-1, 0, 1\}^n$, обобщающего класс CRMP полиномиальных форм. Актуальность и практическая ценность предложенного обобщения обусловлены тем, что для некоторых булевых функций оно позволяет получать представления существенно меньшей длины, чем представления в классе обычных CRMP полиномиальных форм, что продемонстрировано в следующем примере.

Пример. Пусть $n \geq 2$ и $f = x_1 x_2 \cdots x_n \oplus \bar{x}_1 \bar{x}_2 \cdots \bar{x}_n$. Длина любой CRMP формы функции f не меньше n, в то время как минимальная длина CRMP формы функции f, поляризованной по вектору $\alpha = (1, \ldots, 1)$, равна 2.

Некоторые свойства CRMP форм можно обобщить на CRMP формы, поляризованные по вектору α. Для этого рассмотрим преобразование Φ_α, где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_i \in \{-1, 0, 1\}$, а n равно числу переменных обобщённой полиномиальной формы, к которой применяется преобразование. Преобразование Φ_α переводит обобщённые полиномиальные формы в обобщённые полиномиальные формы, причём

$\Phi_\alpha(K_1 \oplus \cdots \oplus K_l) = \Phi_\alpha(K_1) \oplus \cdots \oplus \Phi_\alpha(K_l)$, где $K_1, \ldots, K_l$ — мономы. Поэтому достаточно определить действие преобразования Φ_α на мономы. Заметим, что любой моном K можно представить в виде $K = h_1(x_1) \cdots h_n(x_n)$, где каждая из функций h_i — либо тождественная функция (x), либо отрицание $(\bar{x})$, либо константа 1. Определим преобразования ϕ_0, ϕ_1, ϕ_{-1} таких функций: ϕ_0 — тождественное преобразование, $\phi_1(x) = \bar{x}$, $\phi_1(\bar{x}) = 1$, $\phi_1(1) = x$, а ϕ_{-1} — преобразование, обратное к ϕ_1. Тогда $\Phi_\alpha(K)$ будет равен моному, соответствующему $\phi_{\alpha_1}(h_1)(x_1) \cdots \phi_{\alpha_n}(h_n)(x_n)$.

Преобразование Φ_α обладает следующими свойствами: оно сохраняет длину обобщённой полиномиальной формы; любую CRMP форму оно переводит в CRMP форму, поляризованную по вектору α; если две обобщённые полиномиальные формы задают одну и ту же булеву функцию, то их образы при преобразовании Φ_α также задают одну и ту же булеву функцию.

Преобразование Φ_α можно применить для получения приведённых ниже свойств CRMP форм, поляризованных по α. Идея доказательств состоит в применении преобразования Φ_α и переходе к обычным CRMP формам.

Теорема 1. *Для любого фиксированного $\alpha \in \{-1, 0, 1\}^n$ константа 0 представима единственным образом CRMP формой, поляризованной по вектору α.*

Теорема 2. *Пусть $n \geq 3$. Для любого фиксированного $\alpha \in \{-1, 0, 1\}^n$ каждая булева функция от n переменных может быть представлена CRMP формой, поляризованной по вектору α, длины не более чем $\frac{3}{8}2^n$.*

Теорема 3. *Для любого вектора $\alpha \in \{-1, 0, 1\}^n$ существует булева функция от n переменных, минимальная CRMP полиномиальная форма которой, поляризованная по вектору α, содержит не менее $C_n^{n/2}$ слагаемых при чётном n и не менее $C_n^{(n-1)/2}$ слагаемых при нечётном n.*

Список литературы

[1] К. Д. Кириченко, “Верхняя оценка сложности полиномиальных нормальных форм булевых функций”, *Дискретная математика*, **17**:3 (2005), 80–88. DOI: 10.4213/dm117.

[2] М. А. Башов, С. Н. Селезнева, “О длине функций k-значной логики в классе полиномиальных нормальных форм по модулю k”, *Дискретная математика*, **26**:3 (2014), 3–9. DOI: 10.4213/dm1286.

[3] Н. А. Перязев, “Сложность булевых функций в классе полиномиальных поляризованных форм”, *Алгебра и логика*, **34**:3 (1995), 323–326. DOI: 10.1007/BF02341875.

[4] L. Csanky, M. A. Perkowski, I. Schaefer, "Canonical restricted mixed-polarity exclusive-OR sums of products and the efficient algorithm for their minimisation", *IEE Proceedings E (Computers and Digital Techniques)*, **140**:1 (1993), 69–77. DOI: 10.1049/ip-e.1993.0009.

Статья поступила 25 октября 2026 г.

A generalization of one class of polynomial forms and its properties

A. V. Bukhman

The paper proposes a generalization of CRMP polynomial forms, i.e., generalized polynomial forms in which any two monomials differ in the set of variables they contain. The notion of a CRMP polynomial form polarized by a vector $\alpha \in \{-1, 0, 1\}^n$ is introduced. Some properties of such forms are described.

Keywords: Boolean functions, polynomial forms, CRMP forms.

References

[1] K. D. Kirichenko, "An upper bound for the complexity of polynomial normal forms of Boolean functions", *Diskretnaya Matematika*, **17**:3 (2005), 80–88. DOI: 10.4213/dm117 (in Russian).

[2] M. A. Bashov, S. N. Selezneva, "On the length of functions of k-valued logic in the class of polynomial normal forms modulo k", *Diskretnaya Matematika*, **26**:3 (2014), 3–9. DOI: 10.1515/dma-2015-0013 (in Russian).

[3] N. A. Peryazev, "Complexity of Boolean functions in the class of polarized polynomial forms", *Algebra i Logika*, **34**:3 (1995), 323–326. DOI: 10.1007/BF02341875 (in Russian).

[4] L. Csanky, M. A. Perkowski, I. Schaefer, "Canonical restricted mixed-polarity exclusive-OR sums of products and the efficient algorithm for their minimisation", *IEE Proceedings E (Computers and Digital Techniques)*, **140**:1 (1993), 69–77. DOI: 10.1049/ip-e.1993.0009.

Received on October 25, 2026