О проблеме полноты для полиномиальных и рациональных функций

Н. Ф. Алексиадис*

В докладе представлены результаты исследования задач полноты для ряда функциональных систем, состоящих как из полиномов, так и из рациональных функций при различных ограничениях на коэффициенты.

Ключевые слова: проблема полноты, базис, полином.

1. Постановка задачи

Этот доклад посвящается академику В.Б. Кудрявцеву, моему научному руководителю при учебе в аспирантуре в МГУ им. М.В. Ломоносова, который и поставил мне задачу для диссертационной работы: исследовать проблему полноты для функциональных систем (ф.с.)[1] полиномиальных функций с операциями суперпозиции[2].

В докладе приводится сводка результатов[3] как опубликованных [1–5], так и новых, еще не опубликованных, полученных мною при исследовании проблемы полноты как с алгебраической, так и с алгоритмической точки зрения.

Мы используем стандартные обозначения и общеизвестные понятия теории функциональных систем (следуя книге [6]).

* *Алексиадис Никос Филиппович* — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры прикладной математики и искусственного интеллекта Национального исследовательского университета «МЭИ», e-mail: aleksiadis@yandex.ru, ORCID: 0009-0006-2863-1148.

Aleksiadis Nikos Philippovich — PhD, associate professor, National Research University «MPEI», Chair of Applied Mathematics and Artificial Intelligence.

[1] Функциональная система – это пара $\mathbf{F} = (F, O)$, где F – множество функций, а O – множество операций суперпозиции, при этом каждая операция замкнута относительно множества F.

[2] Операции суперпозиции включают в себя: переименование (в том числе перестановку и отождествление) переменных, введение/удаление фиктивной переменной, подстановку одной функции в другую.

[3] В связи с ограниченностью объема доклада не все результаты автора вошли в доклад.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

2. Определение функциональных систем полиномиальных и рациональных функций

Функция вида $f(x_1, ..., x_n) : \underbrace{N \times N \times \cdots \times N}_{n} \to N$, которая задается с помощью полинома с натуральными коэффициентами (включая 0), называется *полиномиальной функцией с натуральными коэффициентами.*

Ф.с. полиномиальных функций с натуральными коэффициентами $\mathbf{F}_{PN}$ — это пара $\mathbf{F}_{PN} = (F_{PN}, O)$, где F_{PN} — множество всех полиномиальных функций с натуральными коэффициентами.

Функция вида $f(x_1, ..., x_n) : \underbrace{Z \times Z \times \cdots \times Z}_{n} \to Z$, которая задается с помощью полинома с целыми коэффициентами, называется *полиномиальной функцией с целыми коэффициентами.*

Ф.с. полиномиальных функций с целыми коэффициентами $\mathbf{F}_{PZ}$ — это пара $\mathbf{F}_{PZ} = (F_{PZ}, O)$, где F_{PZ} — множество всех полиномиальных функций с целыми коэффициентами.

Функция вида $f(x_1, ..., x_n) : \underbrace{Q \times Q \times \cdots \times Q}_{n} \to Q$, которая задается с помощью полинома с рациональными коэффициентами, называется *полиномиальной функцией с рациональными коэффициентами.*

Ф.с. полиномиальных функций с рациональными коэффициентами $\mathbf{F}_{PQ}$ — это пара $\mathbf{F}_{PQ} = (F_{PQ}, O)$, где F_{PQ} — множество всех полиномиальных функций с рациональными коэффициентами.

Функция вида $f(x_1, ..., x_n) : \underbrace{R \times R \times \cdots \times R}_{n} \to R$, которая задается с помощью полинома с действительными коэффициентами, называется *полиномиальной функцией с действительными коэффициентами.*

Ф.с. полиномиальных функций с действительными коэффициентами $\mathbf{F}_{PR}$ — это пара $\mathbf{F}_{PR} = (F_{PR}, O)$, где F_{PR} — множество всех полиномиальных функций с действительными коэффициентами.

Функция вида $f(x_1, \ldots, x_n) = g(x_1, \ldots, x_n)/h(x_1, \ldots, x_n)$, где $g(x_1, \ldots, x_n)$ и $h(x_1, \ldots, x_n)$ — полиномиальные функции с рациональными коэффициентами вида $\underbrace{Q \times Q \times \cdots \times Q}_{n} \to Q$, называется *рациональной функцией с рациональными коэффициентами.*

Ф.с. рациональных функций с рациональными коэффициентами $\mathbf{F}_{RQ}$ — это пара $\mathbf{F}_{RQ} = (F_{RQ}, O)$, где F_{RQ} — множество всех рациональных функций с рациональными коэффициентами.

Функция вида $f(x_1, \ldots, x_n) = g(x_1, \ldots, x_n)/h(x_1, \ldots, x_n)$, где $g(x_1, \ldots, x_n)$ и $h(x_1, \ldots, x_n)$ — полиномиальные функции с действительны-

ми коэффициентами вида $\underbrace{R \times R \times \cdots \times R}_{n} \to R$, называется *рациональной функцией с действительными коэффициентами.*

Ф.с. рациональных функций с действительными коэффициентами $\mathbf{F}_{RR}$ — это пара $\mathbf{F}_{RR} = (F_{RR}, O)$, где F_{RR} — множество всех рациональных функций с действительными коэффициентами.

Отметим, что в ф.с. $\mathbf{F}_{RQ}$ и $\mathbf{F}_{RR}$ мы рассматриваем и частичные функции (включая нигде неопределенную функцию).

3. Основные результаты

В функциональной системе $\mathbf{F}_{PN}$

1. Все предполные классы образуют критериальную систему;
2. Существует всего 4 предполных класса. Все они описаны явно;
3. Базис полной системы состоит из 3 или из 4 функций;
4. Проблема полноты алгоритмически разрешима;
5. Нахождение базиса полной системы алгоритмически разрешимо.

В функциональной системе $\mathbf{F}_{PZ}$

1. Все предполные классы образуют критериальную систему;
2. Существует континуум предполных классов;
3. Каждая полная система имеет (конечный) базис;
4. Проблема полноты алгоритмически неразрешима;
5. Нахождение базиса полной системы алгоритмически неразрешимо;
6. Распознавание A-функции алгоритмически неразрешимо.

В функциональной системе $\mathbf{F}_{PQ}$

1. Все предполные классы образуют критериальную систему;
2. Существует континуум предполных классов;
3. Каждая полная система имеет (бесконечный) базис.

В функциональной системе $\mathbf{F}_{PR}$

1. Все предполные классы образуют критериальную систему;
2. Существует 2^c предполных классов.

В функциональной системе $\mathbf{F}_{RQ}$

1. Все предполные классы образуют критериальную систему;
2. Существует континуум предполных классов;
3. Проблема полноты алгоритмически неразрешима;

В функциональной системе $\mathbf{F}_{RR}$

1. Все предполные классы образуют критериальную систему;
2. Существует 2^c предполных классов;

Список литературы

[1] Алексиадис Н. Ф., “Функциональная система полиномов с натуральными коэффициентами”, *Вестник МЭИ*, 2013, 125–140.

[2] Алексиадис Н. Ф., “Алгоритмическая неразрешимость проблемы полноты для полиномов с целыми коэффициентами”, *Вестник МЭИ*, 2015, 110–117.

[3] Алексиадис Н. Ф., “Алгоритмическая неразрешимость задачи о нахождении базиса конечной полной системы полиномов с целыми коэффициентами”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **20** (2016), 19–23.

[4] Алексиадис Н. Ф., “О функциональной системе полиномов с рациональными коэффициентами”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **23** (2019), 93–114.

[5] Алексиадис Н. Ф., “Базисы полных систем рациональных функций с рациональными коэффициентами”, *Чебышевский сборник*, **24** (2023), 2–11.

[6] Кудрявцев В. Б., *Функциональные системы*, МГУ, Москва, 1982, 157 с.

Статья поступила 23 октября 2026 г.

On the problem of completeness for polynomial and rational functions

N. P. Aleksiadis

The report examines the problem of the completeness of functional systems of polynomial and rational functions.

Keywords: completeness problem, basis, polynomial.

References

[1] N. Ph. Aleksiadis, “Functional system of polynomials with natural coefficients”, *Vestnik MPEI*, 2013, 125–140.

[2] N. Ph. Aleksiadis, “Algorithmic undecidability of the completeness problem for polynomials with integer coefficients”, *Vestnik MPEI*, 2015, 110–117.

[3] N. Ph. Aleksiadis, “Algorithmic undecidability of the problem of finding a basis of a finite complete system of polynomials with integer coefficients”, *Intelligent Systems. Theory and Applications*, **20** (2016), 19–23.

[4] N. Ph. Aleksiadis, “On the functional system of polynomials with rational coefficients”, *Intelligent Systems. Theory and Applications*, **23** (2019), 93–114.

[5] N. Ph. Aleksiadis, “Bases of complete systems of rational functions with rational coefficients”, *Chebyshevskii sbornik*, **24** (2023), 2–11.

[6] Kudryavtsev V. B., *Functional systems*, MSU, Moscow, 1982, 157 pp.

Received on October 23, 2026