О порождающих множествах в классе конечных автоматов с линейной функцией выходов

Ф. Р. Юсупов*

Ранее автором показано, что класс конечных автоматов с одним линейным выходом не является конечно порожденным по операциям ограниченной композиции. Построено его существенно более узкое порождающее множество из сумматора, константы и конъюнкций с задержкой. Для автоматов с не более чем s входами найдено приведенное порождающее множество из трех автоматов, включающее конъюнкцию от $s+1$ переменной с задержкой, и доказано, что меньшей местности конъюнкции недостаточно. Получена верхняя оценка сложности реализации автоматов схемами из этого множества.

Ключевые слова: конечные автоматы, автоматы с линейной функцией выходов, операции композиции, порождающее множество, сложность реализации.

1. Постановка задачи

Мы используем понятия, введенные в [1,2]. Пусть $E_2 = \{0,1\}$. Рассмотрим конечные автоматы $(A, B, Q, \Phi, \Psi, \overline{q}^0)$, где $A = E_2^n$, $B = E_2^m$, $Q = E_2^l$ и $\overline{q}(t+1) = \Phi(\overline{x}(t), \overline{q}(t))$, $\overline{y}(t) = \Psi(\overline{x}(t), \overline{q}(t))$, $\overline{q}(0) = \overline{q}^0$. Автомат имеет *линейную функцию выходов*, если $\Psi(\overline{x}, \overline{q}) = T\overline{x}^* + R\overline{q}^* + \overline{c}$, где T, R — матрицы, $\overline{c}$ — вектор над E_2, а * — транспонирование вектор-строки. Через $P_{F.D.L.}$ обозначим класс таких автоматов, через $P^1_{F.D.L.}$ — его подкласс автоматов с одним выходом, через $P^{s,1}_{F.D.L.}$ — множество автоматов класса $P^1_{F.D.L.}$, имеющих не более s входов.

Операции *ограниченной композиции* K_c — это подстановка переменных, добавление/изъятие фиктивной переменной, подстановка автоматов и обратная связь, допустимая, если каждый замыкаемый контур проходит через задержку. Добавление операции объединения автоматов дает операции *пополненной композиции* K_s. Через $K_c(M)$ обозначается мно-

* *Юсупов Феликс Ренатович* — аспирант каф. МаТИС мех.-мат. факультета МГУ, e-mail: fel.99@list.ru.

Yusupov Feliks Renatovich — PhD student, Department of Mathematical Theory of Intelligent Systems, Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

жество автоматов, получаемых из M операциями K_c. Полнота в классе линейных автоматов изучалась в [3].

Через P_2 обозначим множество всех функций алгебры логики. Для $\varphi \in P_2$ и $a \in E_2$ через $q^a(\varphi)$ обозначим автомат с одной задержкой: $q(0) = a$, $q(t+1) = \varphi(\overline{x}(t))$, $y(t) = q(t)$, то есть функцию φ, поданную на задержку с начальным состоянием a. Он принадлежит $P^1_{F.D.L.}$. Через $\mathbf{1}$ обозначим автомат, выдающий 1 во все моменты времени. В [1] доказано, что никакое конечное множество по операциям K_c не порождает класс $P^1_{F.D.L.}$, и что $P^1_{F.D.L.} = K_c(M_0)$, где $M_0 = \{q^a(\varphi) \mid \varphi \in P_2,\ a \in E_2\} \cup \{x_1 + x_2,\ \mathbf{1}\}$. Для $N \subseteq \mathbb{N}$ положим

$$f_n = q^0(x_1 \wedge \ldots \wedge x_n), \qquad B_n = \{f_n,\ x_1 + x_2,\ \mathbf{1}\},$$
$$M_1(N) = \{f_n \mid n \in N\} \cup \{x_1 + x_2,\ \mathbf{1}\}.$$

При $s > 1$ множество $P^{s,1}_{F.D.L.}$ не замкнуто относительно K_c (подстановка увеличивает число входов), поэтому множество B назовем *порождающим* для $P^{s,1}_{F.D.L.}$, если $P^{s,1}_{F.D.L.} \subseteq K_c(B)$, и *приведенным порождающим*, если к тому же никакой его элемент нельзя удалить без потери этого свойства.

Задачи работы: сократить порождающее множество M_0; показать, что B_{s+1} является приведенным порождающим множеством для $P^{s,1}_{F.D.L.}$.

2. Полученные результаты

Теорема 1. *Для любого бесконечного множества $N \subseteq \mathbb{N}$ выполнено $P^1_{F.D.L.} = K_c\big(M_1(N)\big)$. При конечном N равенство не имеет места.*

Идея доказательства. Подставляя $\mathbf{1}$ на «лишние» входы, из конъюнкции большой местности получаем любую меньшую. Единичное начальное состояние сводится к нулевому прибавлением последовательности $1\,0\,0\ldots$, а функция на задержке есть сумма мономов ее полинома Жегалкина на задержке. Вторая часть следует из конечности $M_1(N)$. □

Тем самым порождающее множество класса $P^1_{F.D.L.}$ удалось сильно сузить по сравнению с M_0. Бесконечным оно остается только из-за роста числа входов, поэтому далее будем ограничивать число входов.

Теорема 2. *Всякий автомат класса $P^1_{F.D.L.}$, имеющий не более s входов, реализуется автоматами множества B_{s+1} операциями ограниченной композиции: $P^{s,1}_{F.D.L.} \subseteq K_c(B_{s+1})$.*

Идея доказательства. Состояния кодируются унитарно: по разряду на состояние. Новое значение разряда есть сумма произведений условий

«на входе данный набор» и «текущее состояние переходит в данное»; каждое произведение реализуется одним элементом f_{s+1}. Обратные связи замыкаются по одной. □

Таким образом, при ограничении на число входов хватает трех автоматов. Далее будем исследовать возможность уменьшения местности конъюнкции.

Теорема 3. $P^{s,1}_{F.D.L.} \not\subseteq K_c(B_s)$.

Идея доказательства. Индукцией по числу элементов в схеме из B_s проверяется, что слагаемые сигнала с произведением всех s входов предыдущего момента не зависят от более ранних входов: на него уходят все входы f_s, и для памяти не остается места. Автомат $y(0) = 1$, $y(t+1) = x_1(t) \cdots x_s(t)\, y(t)$ этому не удовлетворяет: нужна конъюнкция всех входов и предыдущего выхода. □

Итак, для памяти нужна дополнительная переменная конъюнкции.

Следствие 1. *Множество B_{s+1} является приведенным порождающим для $P^{s,1}_{F.D.L.}$, и местность конъюнкции в нем уменьшить нельзя (при $m \leqslant s$ имеем $K_c(B_m) \subseteq K_c(B_s)$). Без f_{s+1}, константы или сумматора получаются лишь автоматы, реализующие в начальный момент аффинные, сохраняющие нуль или монотонные функции соответственно.*

Сложность $L(f)$ — наименьшее число элементов f_{s+1} в схеме из B_{s+1}, реализующей f.

Теорема 4. *Если автомат $f \in P^{s,1}_{F.D.L.}$ имеет r входов и k состояний, то $L(f) \leqslant 2^r k + 1 \leqslant 2^s k + 1$.*

Идея доказательства. Оценка вытекает из схемной реализации, использованной в доказательстве теоремы 2: по элементу f_{s+1} на каждую пару «состояние, входной набор» и еще один на начальное состояние. □

3. Заключение

Порождающее множество класса $P^1_{F.D.L.}$ сведено к сумматору, константе и конъюнкции с задержкой. Для автоматов с не более чем s входами найдено приведенное порождающее множество из трех автоматов и показано, что местность $s+1$ входящей в него конъюнкции наименьшая.

Список литературы

[1] Юсупов Ф. Р., “О мощности порождающих множеств в классе автоматов с линейной функцией выходов”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **29**:4 (2025), 150–162.

[2] Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С., *Введение в теорию автоматов*, Наука, Москва, 1985.

[3] Часовских А. А., “О полноте в классе линейных автоматов”, *Математические вопросы кибернетики*, Вып. 3, Наука, Москва, 1991, 140–166.

Статья поступила 6 ноября 2026 г.

On generating sets in the class of finite automata with a linear output function

F. R. Yusupov

It was shown earlier that the class of finite automata with one linear output is not finitely generated under bounded composition. A much narrower generating set is built from the adder, the constant and conjunctions with a delay. For automata with at most s inputs a reduced generating set of three automata is found, including a conjunction of $s + 1$ variables with a delay, and it is proved that a smaller arity of the conjunction is insufficient. An upper bound for the complexity of realization of automata by circuits over this set is obtained.

Keywords: finite automata, automata with a linear output function, composition operations, generating set, complexity of realization.

References

[1] Yusupov F. R., “On the cardinality of generating sets in the class of automata with a linear output function”, *Intelligent Systems. Theory and Applications*, **29**:4 (2025), 150–162 (In Russian).

[2] Kudryavtsev V. B., Aleshin S. V., Podkolzin A. S., *Introduction to Automata Theory*, Nauka, Moscow, 1985 (In Russian).

[3] Chasovskikh A. A., “On completeness in the class of linear automata”, *Mathematical Problems of Cybernetics*, Iss. 3, Nauka, Moscow, 1991, 140–166 (In Russian).

Received on November 6, 2026