Класс линейных автоматов Мура

А. А. Часовских*

Показано, что в классе линейных автоматов Мура с оператором аппроксимационного замыкания отсутствуют предполные классы и базис, но содержится континуум замкнутых классов.

Ключевые слова: линейный автомат, автомат Мура, аппроксимационное замыкание, полнота, выразимость, замкнутый класс, предполный класс.

Мы используем определение конечного инициального автомата и терминологию из [1]. Конечный инициальный автомат называется линейным, если его операторы переходов и выходов являются линейными относительно всех переменных.

Множество всех степенных рядов переменной ξ с коэффициентами из поля $GF(2)$ обозначим R_2, а множество всех таких рядов, коэффициенты которых составляют периодическую (с предпериодом) последовательность, обозначим $E'_2(\xi)$. Как показано в [2], для линейного автомата с n входами и одним выходом над полем $GF(2)$ найдутся такие μ_i, $\mu_i \in E'_2(\xi)$, $i = \overline{0,n}$, что этот линейный автомат реализует следующее отображение f из R_2^n в R_2:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i + \mu_0. \tag{1}$$

Множество линейных автоматов над полем $GF(2)$ обозначим L_2. На L_2 рассматриваем замыкание по операциям композиции, состоящее из операций суперпозиции и обратной связи (К-замыкание), и аппроксимационное замыкание (А-замыкание) [3]. В работе [4] найдены все А-предполные и К-предполные классы в классах линейных автоматов над конечными полями. Оказалось, что для любого конечного поля количество А-предполных классов конечно, а множество К-предполных классов счетно. Таким образом, возникает интерес к исследованию решеток А-замкнутых и К-замкнутых в L_2 классов. Из определений этих замыканий следует, что всякий А-замкнутый класс является К-замкнутым. Поэтому

* *Часовских Анатолий Александрович* — доктор физ.-мат. наук, профессор каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: anatoliy.chasovskikh@math.msu.ru, ORCID: 0009-0007-4207-7777.

Chasovskikh Anatoly Alexandrovich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intellectual Systems.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

решетка K-замкнутых классов содержит решетку A-замкнутых классов, и естественно начать с изучения свойств последней.

Согласно определению из [5], конечный автомат называется автоматом Мура, если для любого момента времени его выход не зависит от значений входов в этот момент. Для представления в виде (1) это означает равенство нулю свободных членов всех коэффициентов при переменных: $\mu_i(0) = 0$, $i = \overline{1,n}$. Такие автоматы, называемые линейными автоматами Мура, образуют замкнутый по обоим рассматриваемым операторам замыкания класс, который мы обозначаем LD_2. В этой работе мы устанавливаем некоторые свойства класса LD_2.

Определение 1. Переменная x_i функции, заданной равенством (1), является существенной, если $\mu_i \neq 0$. Существенную переменную x_i этой функции называем d-переменной, если

$$d = \min\{t \mid \text{коэффициент при } \xi^t \text{ в } \mu_i \text{ равен } 1\}.$$

Количество d-переменных функции f обозначим $r_d(f)$, а через $a(f) = \mu_0(0)$ ее начальный выход. Для множества $M \subseteq LD_2$, числа $d \in \mathbb{N}$ и $a \in \{0,1\}$ положим: $N_a(M,d) = \infty$, если множество $\{r_d(f) \mid f \in M, a(f) = a\}$ не ограничено, и $N_a(M,d) = \max(\{r_d(f) \mid f \in M, a(f) = a\} \cup \{0\})$ в противном случае.

Теорема 1. *В классе LD_2 отсутствуют A-предполные классы. Класс LD_2 не содержит A-базиса.*

Доказательство. Заметим, что для множества $M \subseteq LD_2$ из двух равенств

$$N_a(M,1) = \infty, \quad a \in \{0,1\} \tag{2}$$

следует A-полнота множества M. Из невыполнения хотябы одного из этих равенств следует, что $A(M)$ не совпадает с LD_2 и не является A-предполным классом. Поэтому в LD_2 отсутствуют A-предполные классы.

Если выполнены оба равенства (2), то для любой $f \in M$ и любого $a \in \{0,1\}$ будет выполнено $N_a(M \setminus \{f\}, 1) = \infty$, то есть, удаляя из A-полного множества любую фунцию, получим A-полное множество. Отсюда следует, что класс LD_2 не содержит базиса. □

Лемма 1. *Пусть $M \subseteq LD_2$ и $0 < |M| < \infty$. Тогда для любого $d \in \mathbb{N}$ и любого $a \in \{0,1\}$ выполнено: $N_a(A(M),d) = N_a(K(M),d) < \infty$.*

Определим индуктивно следующую последовательность функций из LD_2.

$$f_1(x_1) = \xi x_1.$$

Пусть $d > 1$ и функции f_1, f_2,…,f_{d-1} построены. Через n_d обозначим число $N_0(A(\{ f_1, f_2, \dots f_{d-1} \}), d)$, которое существует по лемме 1. Положим:

$$f_d(x_1, x_2, \dots, x_{n_d+1}) = \sum_{i=1}^{n_d+1} \xi^d x_i.$$

Теорема 2. *Класс LD_2 содержит подкласс автоматов, сохраняющих нулевую последовательность, со счетным θ-базисом, $\theta \in \{A, K\}$, который, в свою очередь, содержит континуум θ-замкнутых классов.*

Доказательство. Пусть $\theta \in \{\mathrm{A}, \mathrm{K}\}$. Через Ω обозначим $\{ f_d \mid d = 1, 2, \dots \}$. Тогда счетное множество Ω является θ-базисом в θ-замкнутом классе $\theta(\Omega)$.

Для любой бесконечной последовательности нулей и единиц α, $\alpha = a_1, a_2, \dots, a_d, \dots$, положим:

$$\Omega(\alpha) = \{f_d \mid a_d = 1\}.$$

Нетрудно видеть, что для двух различных последовательностей α_1 и α_2 выполнено: $\theta(\Omega(\alpha_1)) \neq \theta(\Omega(\alpha_2))$, откуда следует заключительное утверждение теоремы 2. □

Замечание 1. Ограничение о сохранении нулевой последовательности, накладываемое в теореме 2, является существенным, потому что класс LD_2 содержит все константы (функции без существенных переменных), а для любого множества S натуральных чисел множество констант $\{0\} \cup \{\xi^d \mid d \in S\}$ образует θ-замкнутый класс. Таким образом, континуум θ-замкнутых классов строится из констант.

Замечание 2. Теоремы 1 и 2 позволяют оценить сложность решетки замкнутых классов класса линейных автоматов аналогично тому, как это было сделано Ю. И. Яновым и А. А. Мучником [6] для классов k-значных логик. Заметим, что для линейных автоматов свойства решеток замкнутых классов, представленные в этих теоремах, возникают уже в двузначном случае, тогда как в k-значных логиках они проявляются, начиная с $k = 3$.

Список литературы

[1] В. Б. Кудрявцев, С. В. Алешин, А. С. Подколзин, *Введение в теорию автоматов*, Издательство Московского университета, Москва, 2019, 436 с.

[2] A. Gill, *Linear Sequential Circuits*, McGraw-Hill, New York, 1966, 215 pp.

[3] В. А. Буевич, "Об алгоритмической неразрешимости распознавания A-полноты для о.-д. функций", *Математические заметки*, 1972, № 6, 687–697. DOI: 10.1007/BF01093729.

[4] А. А. Часовских, "Максимальные подклассы в классах линейных автоматов над конечными полями", *Дискретная математика*, **31**:4 (2019), 88–101. DOI: 10.4213/dm1589.

[5] E. F. Moore, "Gedanken-experiments on Sequential Machines", *Automata Studies*, Annals of Mathematical Studies, **34**, 1956, 129–153.

[6] Ю. И. Янов, А. А. Мучник, "О существовании k-значных замкнутых классов, не имеющих конечного базиса", *ДАН СССР*, **127**:1 (1959), 44–46 .

Статья поступила 31 октября 2026 г.

The class of Moore linear automata

A. A. Chasovskikh

It is shown that the class of linear Moore automata equipped with an approximation-closure operator contains no precomplete classes and no basis, but does contain a continuum of closed classes.

Keywords: linear automaton, Moore automaton, approximation closure, completeness, expressibility, closed class, precomplete class.

References

[1] V. B. Kudryavtsev, S. V. Aleshin, A. S. Podkolzin, *Vvedenie v teoriyu avtomatov*, Izdatelstvo Moskovskogo universiteta, M, 2019, 436 (in Russian) pp.

[2] A. Gill, *Linear Sequential Circuits*, McGraw-Hill, New York, 1966, 215 pp.

[3] V. A. Buevich, "Ob algoritmicheskoj nerazreshimosti raspoznavaniya A-polnoty dlya o.-d. funkcij", *Matematicheskie zametki*, 1972, № 6, 687–697. DOI: 10.1007/BF01093729, (in Russian).

[4] A. A. Chasovskih, "Maksimalnye podklassy v klassah linejnyh avtomatov nad konechnymi polyami", *Diskretnaya matematika*, **31**:4 (2019), 88–101. DOI: 10.4213/dm1589, (in Russian).

[5] E. F. Moore, "Gedanken-experiments on Sequential Machines", *Automata Studies*, Annals of Mathematical Studies, **34**, 1956, 129–153.

[6] Yu. I. Yanov, A. A. Muchnik, "O sushestvovanii k-znachnyh zamknutyh klassov, ne imeyushih konechnogo bazisa", *DAN SSSR*, **127**:1 (1959), 44–46, (in Russian) .

Received on October 31, 2026