Сложение n различных натуральных чисел клеточными автоматами с локаторами

Ч. Надиров*

Требуется сложить n различных натуральных чисел, заданных координатами активных клеток. Показано, что эту задачу можно решить двумерным клеточным автоматом с локаторами за $5\lceil \log_2 n \rceil + 1$ тактов независимо от величин слагаемых.

Ключевые слова: клеточные автоматы, локаторы, сложение.

1. Введение

Клеточные автоматы с локаторами позволяют передавать сигналы между клетками, находящимися на произвольном расстоянии друг от друга. Каждая клетка получает суммарные сигналы с заданных направлений и использует их при выборе следующего состояния. Определение этой модели и её свойства изложены в работах [1–3]. Возможности модели при решении задач, связанных с обработкой точек на плоскости, рассматриваются в работе [4], посвящённой подсчёту числа точек.

В настоящей работе рассматривается задача сложения различных натуральных чисел, представленных координатами активных клеток на положительной полуоси. Результат также задаётся координатой активной клетки. Для решения задачи используется двумерный клеточный автомат с локаторами, время работы которого зависит только от числа слагаемых и не зависит от их величин.

Идея алгоритма состоит в параллельном сложении соседних пар слагаемых. Сумма каждой пары строится с помощью вспомогательных клеток на плоскости за постоянное число тактов. После одной итерации число слагаемых уменьшается примерно вдвое; если оно нечётно, непарное слагаемое сохраняется до следующей итерации. Повторение этой процедуры позволяет получить сумму всех входных чисел за $O(\log n)$ тактов, где n — число слагаемых.

* *Надиров Чингиз* — аспирант каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ имени М. В. Ломоносова, e-mail: chingiz.nadirov@math.msu.ru, ORCID: 0009-0008-6361-417X.

Nadirov Chingiz — PhD student, Department of Mathematical Theory of Intelligent Systems, Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

2. Постановка задачи и формулировка результата

Пусть $0 < x_1 < \cdots < x_n$, $n \geq 1$. Изначально активны начало координат в состоянии O и клетки $(x_i, 0)$ в состоянии 1; остальные покоятся. Требуется оставить только O и результат в точке $(\sum_i x_i, 0)$.

Теорема. *Существует двумерный клеточный автомат с девятью локаторами, который решает задачу сложения n различных натуральных чисел, заданных координатами активных клеток на положительной полуоси, за время не более $5\lceil \log_2 n \rceil + 1$ тактов.*

3. Алгоритм сложения

Пусть $0 < a_1 < \cdots < a_m$ — текущие слагаемые. Складываем пары $(a_{m-1}, a_m), (a_{m-3}, a_{m-2}), \ldots$; при нечётном m сохраняем a_1. Переходы не используют состояния соседних клеток. Используем алфавит $G = \{0,1\} \times \{0,1,2,3,4,5,6\} \times \{0,1\}$, со сложением по модулю 2 в первой компоненте и максимумом в остальных; $e = (0,0,0)$. Первая компонента определяет чётность числа слагаемых, третья — их наличие, вторая различает вспомогательные сигналы. Ниже s_ν — значение локатора текущей клетки, $*$ — любое значение компоненты; q_0 — состояние покоя. Буквами N, NE, E, SE, S, SW, W, NW обозначены направления лучей-локаторов: север, северо-восток, восток, юго-восток, юг, юго-запад, запад и северо-запад соответственно. Полный локатор обозначается через Ω. Начало координат сохраняет состояние O и сигнал $(0,1,0)$.

На рис. 1 чёрные точки активны, светлые активируются на следующем такте; пунктир обозначает существенные направления сигналов.

1. Разметка. Слагаемые передают $(1,0,1)$. Левый и правый элементы пары получают метки «н», «ч»; непарный элемент — c_1. В случае, когда осталось единственное слагаемое, переводим его в состояние R.

Переход	Условие
$1 \to$ н	$s_E = (1,0,1)$
$1 \to$ ч	$s_W = (*,1,1),\ s_E = (0,0,*)$
$1 \to \mathrm{c}_1$	$s_W = (0,1,0),\ s_E = (0,0,1)$
$1 \to R$	$s_W = (0,1,0),\ s_E = (0,0,0)$

Сигналы состояний «н», «ч» равны $(0,2,0)$, $(0,3,0)$ соответственно; состояния ожидания и R передают e.

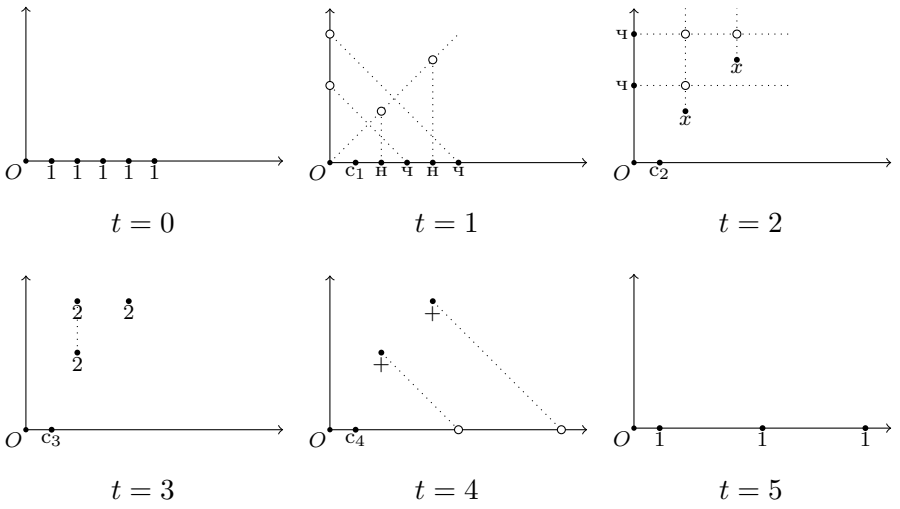


Рис. 1: Одна итерация сложения 5 натуральных чисел

2. Вспомогательные точки. Для правого элемента b создаём активные ячейки в точках $(0, b)$, для левого a — (a, a):

Переход	Условие
$q_0 \to$ ч	$s_S = (0,1,0),\ s_{SE} = (0,3,0)$
$q_0 \to x$	$s_S = (0,2,0),\ s_{SW} = (0,1,0).$

Эти точки передают $(0,3,0)$ и $(0,4,0)$. Прежние «н», «ч» переходят в q_0.

3. Кандидаты. Пересечения лучей от $(0, b)$ на восток и от (a, a) на север дают точки (a, b), $b > a$: $q_0 \to 2$ при $s_W = (0,3,0),\ s_S = (0,4,0)$. Кандидаты передают $(0,5,0)$; прежние точки «ч» и «x» переходят в q_0.

4. Выбор пары. В каждом столбце оставляем нижнего кандидата, соответствующего ближайшему правому слагаемому:

$$2 \to + \text{ при } s_S = e, \qquad 2 \to q_0 \text{ при } s_S = (0,5,0).$$

Выбранная клетка передаёт $(0,6,0)$.

5. Сумма. Диагональ $x + y = a + b$ из выбранной точки пересекает ось в $(a + b, 0)$: $q_0 \to 1$ при $s_W = (0,1,0),\ s_{NW} = (0,6,0)$. Новое слагаемое передаёт $(1,0,1)$, а $+ \to q_0$. Непарный элемент восстанавливается по цепочке $\mathrm{c}_1 \to \mathrm{c}_2 \to \mathrm{c}_3 \to \mathrm{c}_4 \to 1$; промежуточные состояния передают e.

После k итераций остаётся $\lceil n/2^k \rceil$ слагаемых. Каждая итерация занимает пять тактов, поэтому через $5\lceil \log_2 n \rceil$ тактов остаётся единственное слагаемое $\sum_{i=1}^{n} x_i$. Следующий такт переводит его в состояние R. Та-

ким образом, время работы равно $5\lceil \log_2 n \rceil + 1$ и не зависит от величин входных чисел.

Список литературы

[1] Э. Э. Гасанов, "Клеточные автоматы с локаторами", *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **24**:2 (2020), 120–133.

[2] Калачев Г. В., "Замечания к определению клеточного автомата с локаторами", *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **24**:4 (2020), 47–56.

[3] Э. Э. Гасанов, "Клеточные автоматы с локаторами как модель устройств с беспроводной связью", *Математические вопросы кибернетики, Вып. 21*, ФИЗМАТЛИТ, М., 2023, 5–51, DOI: 10.20948/mvk-2023-5.

[4] Э. Э. Гасанов, А. Е. Бобров, "Подсчет числа точек на плоскости клеточными автоматами с локаторами", *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **30**:4 (2026).

Статья поступила 2 ноября 2026 г.

Addition of n distinct natural numbers using cellular automata with locators

C. Nadirov

The task is to add n distinct positive integers represented by the coordinates of active cells. It is shown that a two-dimensional cellular automaton with locators solves this problem in $5\lceil \log_2 n \rceil + 1$ steps, independently of the values of the summands.

Keywords: cellular automata, locators, addition.

References

[1] E. E. Gasanov, "Cellular automata with locators", *Intelligent Systems: Theory and Applications*, **24**:2 (2020), 120–133 (In Russian).

[2] G. V. Kalachev, "Remarks on the definition of cellular automaton with locators", *Intelligent Systems. Theory and Applications*, **24**:4 (2020), 47–56 (In Russian).

[3] E. E. Gasanov, "Cellular automata with locators as a model for wireless communication devices", *Matematicheskie voprosy kibernetiki, Issue 21*, FIZMATLIT, M., 2023, 5–51 (In Russian), DOI: 10.20948/mvk-2023-5.

[4] E. E. Gasanov, A. E. Bobrov, "Counting the number of points on a plane using cellular automata with locators", *Intelligent systems. Theory and applications*, **30**:4 (2026) (In Russian).

Received on November 2, 2026