Проблема полноты в классе линейных дефинитных автоматов

И. В. Молдованов*

В работе исследуются задачи полноты в классе линейных дефинитных автоматов над полем из двух элементов. Для аппроксимационной полноты и полноты относительно суперпозиции описаны приведенные критериальные системы замкнутых классов. На их основе также устанавливается алгоритмическая разрешимость проверки обоих видов полноты конечных систем.

Ключевые слова: линейные дефинитные автоматы, аппроксимационная полнота, суперпозиция.

В теории функциональных систем задача полноты состоит в описании множеств функций, из которых с помощью заданных операций можно получить все функции рассматриваемого класса.

Полнота линейных автоматов относительно композиции исследовалась в работах А. А. Часовских [1]. Для линейных автоматов над конечными полями была построена критериальная система относительно оператора K-замыкания и установлена алгоритмическая разрешимость проверки K-полноты конечных систем. Для линейных автоматов над двухэлементным полем была построена критериальная система относительно операций суперпозиции и доказано отсутствие конечных S-полных систем [2]. В классе двоичных дефинитных автоматов Д. Н. Жук установил неразрешимые случаи распознавания полноты относительно S-замыкания и A-замыкания [3].

В данной работе исследуется полнота систем линейных дефинитных автоматов над двухэлементным полем E_2. Двоичные последовательности отождествляются с формальными рядами из $R_2 = E_2[[\xi]]$, а автомат с n входами и одним выходом – с отображением $R_2^n \to R_2$. Через $S(M)$ обозначим замыкание множества автоматов M относительно операций суперпозиции, таких как переименование, отождествление входных переменных и подстановка.

* *Молдованов Илья Владимирович* — выпускник аспирантуры каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: jamfr-d@mail.ru, ORCID: 0009-0004-0595-3350.

Moldovanov Ilia Vladimirovich — graduate of the postgraduate program at the Chair of Mathematical Theory of Intellectual Systems, Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

Класс линейных дефинитных автоматов определяется равенством

$$LD_2 = S(\{x_1 + x_2,\ \xi x,\ \xi x + 1\}).$$

Здесь 1 обозначает ряд, соответствующий последовательности 10^∞. Рассматриваемый класс LD_2 является подмножеством пересечения классов линейных и дефинитных автоматов. Система $M \subseteq LD_2$ называется S-полной, если $S(M) = LD_2$.

Далее отождествляем автоматы, различающиеся наличием фиктивных входов. Канонический представитель данного автомата получаем удалением всех фиктивных входов, а результат применения операций суперпозиций также рассматриваем с точностью до данного соглашения. Канонические представители автоматов класса LD_2 имеют в точности вид

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} u_i(\xi) x_i + u_0(\xi), \qquad u_0, \ldots, u_n \in E_2[\xi],$$

где $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ — число существенных входов и $u_i \neq 0$ при $1 \leq i \leq n$, а при $n = 0$ имеем $f() = u_0(\xi)$ [4].

Для $M \subseteq LD_2$ через $A(M)$ обозначим множество всех автоматов $f \in LD_2$, для которых при каждом $t \in \mathbb{N}$ найдется автомат $g \in S(M)$, совпадающий с f на первых t тактах при любых входных последовательностях. Система M называется A-полной, если $A(M) = LD_2$.

Для автомата f в указанной канонической форме обозначим через $a_{1,i}$ коэффициент при ξ в многочлене $u_i(\xi)$. Определим пять классов

$$T_0^A = \{f \in LD_2 : u_0(0) = 0\}, \quad T_1^A = \{f \in LD_2 : \textstyle\sum_{i=1}^n u_i(0) + u_0(0) = 1\},$$
$$V_1^A = \left\{f \in LD_2 : \left|\{i \in \{1, \ldots, n\} : u_i(0) \neq 0\}\right| \leq 1\right\},$$
$$V_2^A = \left\{f \in LD_2 : \sum\nolimits_{i=1}^n u_i(0) = 1\right\},$$
$$U_A = \{f \in LD_2 : a_{1,i} = 0 \quad (1 \leq i \leq n)\}.$$

Положим $H_A = \{T_0^A, T_1^A, V_1^A, V_2^A, U_A\}$, все эти классы являются A-замкнутыми.

Теорема 1 ([4]). *Для любого множества $M \subseteq LD_2$ выполнено $A(M) = LD_2 \iff M \nsubseteq \Theta$ для всех $\Theta \in H_A$.*

Система H_A является приведенной: для любых различных $\Theta_1, \Theta_2 \in H_A$ имеем $\Theta_1 \nsubseteq \Theta_2$. Также система H_A конечна, поэтому для конечной системы $M \subseteq LD_2$, заданной каноническими формами ее автоматов, проверка A-полноты алгоритмически разрешима.

Для описания критериальной системы относительно S-полноты введем следующие обозначения. Пусть $p_1 = \xi, p_2 = \xi + 1, p_3, \ldots$ – все неприводимые многочлены из $E_2[\xi]$, $n_j = \deg p_j$, $P_j = E_2[\xi]/(p_j)$ – конечное поле из 2^{n_j} элементов, а $[u]_q$ – класс вычетов многочлена u по модулю q. Через $P_j^1, \ldots, P_j^{l_j}$ обозначим все максимальные собственные подполя P_j. Определим также классы многочленов

$$L_{j,s}^{(1)} = \{u \in E_2[\xi] : [u]_{p_j} \in P_j^s\},$$
$$N_j^{(1)} = \left\{u \in E_2[\xi] : \ \exists v \in E_2[\xi],\ \deg(v) < \deg(p_j),\ u \equiv v^2 \pmod{p_j^2}\right\},$$
$$I_{j,j',\sigma}^{(1)} = \{u \in E_2[\xi] : \sigma([u]_{p_j}) = [u]_{p_{j'}}\}.$$

Здесь $j \in \mathbb{N}$, $1 \le s \le l_j$, а для $I_{j,j',\sigma}^{(1)}$ имеем $j > j'$, $n_j = n_{j'}$ и $\sigma : P_j \to P_{j'}$ пробегает все изоморфизмы полей.

Положим $C(f) = \{u_i \mid 1 \le i \le n\}$ и определим классы автоматов [5] $L_{j,s} = \{f \in LD_2 : C(f) \subseteq L_{j,s}^{(1)}\}$, $N_j = \{f \in LD_2 : C(f) \subseteq N_j^{(1)}\}$, $I_{j,j',\sigma} = \{f \in LD_2 : C(f) \subseteq I_{j,j',\sigma}^{(1)}\}$.

Положим $D_j(f) = \{i \in \{1, \ldots, n\} : u_i \not\vdots p_j\}$. Для $j \in \mathbb{N}$ и конечного $J \subseteq \mathbb{N}$, $|J| \ge 2$, введем

$$V_j = \{f \in LD_2 : |D_j(f)| \le 1\},$$
$$P_J = \left\{f \in LD_2 : \begin{array}{c}(\exists j_0 \in J :\ D_{j_0}(f) = \varnothing) \text{ или} \\ (\exists r \in \{1, \ldots, n\}\ \forall j \in J :\ D_j(f) \subseteq \{r\})\end{array}\right\},$$
$$\bar{P} = \{f \in LD_2 : n \le 1 \text{ или } \exists j \in \mathbb{N}\ \left(D_j(f) = \varnothing\right)\}.$$

Пусть $r_{j,1}, \ldots, r_{j,2^{n_j}}$ – все элементы поля P_j, $r_{j,1} = 0$. Для $j \in \mathbb{N}$ и $1 \le s \le 2^{n_j}$ положим

$$U_j = \left\{f \in LD_2 : \left[\sum\nolimits_{i=1}^{n} u_i\right]_{p_j} = 1\right\},$$
$$S_{j,s} = \left\{f \in LD_2 : r_{j,s}\left[\sum\nolimits_{i=1}^{n} u_i\right]_{p_j} + [u_0]_{p_j} = r_{j,s}\right\}.$$

Обозначим через $\mathcal{H}$ систему всех перечисленных классов $L_{j,s}, N_j, I_{j,j',\sigma}, V_j$, $P_J, \bar{P}, U_j, S_{j,s}$ с указанными диапазонами индексов. Все классы системы $\mathcal{H}$ собственные и замкнуты относительно суперпозиции.

Теорема 2 ([6]). *Для любого множества $M \subseteq LD_2$ выполнено $S(M) = LD_2 \iff M \not\subseteq \Theta$ для всех $\Theta \in \mathcal{H}$.*

Система $\mathcal{H}$ является приведенной: для любых различных $\Theta_1, \Theta_2 \in \mathcal{H}$ имеем $\Theta_1 \not\subseteq \Theta_2$.

Теорема 3. *Для конечной системы $M \subseteq LD_2$, заданной каноническими формами ее автоматов, проверка равенства $S(M) = LD_2$ алгоритмически разрешима.*

Список литературы

[1] А. А. Часовских, "Приведенные критериальные системы предполных классов в классах линейных автоматов над конечными полями", *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **22**:4 (2018), 115–134.

[2] А. А. Часовских, "Линейно-автоматные функции с операциями суперпозиции", *Нейрокомпьютеры: разработка, применение*, 2013, № 8, 3–13.

[3] Д. Н. Жук, "О неразрешимости проблемы полноты для дефинитных автоматов", *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **12**:1–4 (2008), 211–228.

[4] И. В. Молдованов, "Аппроксимационная полнота линейных дефинитных автоматов", *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **29**:4 (2025), 135–149.

[5] И. В. Молдованов, "Алгоритмическая разрешимость задачи полноты конечных содержащих константу ноль множеств в классе линейных дефинитных автоматов", *Чебышевский сборник*, **26**:5(101) (2025), 137–157.

[6] И. В. Молдованов, "Проблема полноты линейных дефинитных автоматов", *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **30**:2 (2026), 120–141.

Статья поступила 8 ноября 2026 г.

The completeness problem in the class of linear definite automata

I. V. Moldovanov

This work studies completeness problems in the class of linear definite automata over the two-element field. Reduced criterial systems of closed classes are described for approximation completeness and completeness under superposition. These criteria are also used to establish the algorithmic decidability of both completeness problems for finite systems.

Keywords: linear definite automata, approximation completeness, superposition.

References

[1] A. A. Chasovskikh, "Reduced criterial systems of precomplete classes in classes of linear automata over finite fields", *Intelligent Systems. Theory and Applications*, **22**:4 (2018), 115–134.

[2] A. A. Chasovskikh, “Linear automata functions with superposition operations”, *Neurocomputers: development, application*, 2013, № 8, 3–13.

[3] D. N. Zhuk, “On the unsolvability of the completeness problem for definite automata”, *Intelligent Systems. Theory and Applications*, **12**:1–4 (2008), 211–228.

[4] I. V. Moldovanov, “Approximation completeness of linear definite automata”, *Intelligent Systems. Theory and Applications*, **29**:4 (2025), 135–149.

[5] I. V. Moldovanov, “Algorithmic decidability of the completeness problem for finite sets containing the zero constant in the class of definite linear automata”, *Chebyshevskii Sbornik*, **26**:5(101) (2025), 137–157.

[6] I. V. Moldovanov, “The completeness problem for linear definite automata”, *Intelligent Systems. Theory and Applications*, **30**:2 (2026), 120–141.

Received on November 8, 2026