Вычисление числовых функций некоторыми видами автоматов

В. А. Литовский*

В работе исследуются счётнозначные функции, вычисляемые классическими автоматами и автоматами с остановками. Рассмотрены свойства кодировок, преобразующих числа во входные последовательности автомата и обратно. Найдены классы функций, вычислимых указанными видами автоматов в этих кодировках.

Ключевые слова: вычислимость, автомат.

За $\mathbb{N}_0$ обозначим множество натуральных чисел с нулём, за $\mathbb{N}_\lambda$ обозначи $\mathbb{N}_0 \cup \{\lambda\}$, где под λ подразумевается специальный символ, означающий, что отображение в данной точке неопределено.

1. Определения

Конечным автоматом называется упорядоченная пятёрка (A, B, Q, φ, ψ), где

- A, B и Q — непустые конечные алфавиты, называемые соответственно входным, выходным и внутренним алфавитами (Q также часто называется множеством состояний, а его символы — состояниями);
- $\varphi\colon Q \times A \to Q$ и $\psi\colon Q \times A \to B$ — функции, называемые соответственно функциями переходов и выходов.

Для конечного автомата определяются отображения $\overline{\varphi}\colon Q \times A^{\leq\omega} \to Q^{\leq\omega}$,$\overline{\psi}\colon Q \times A^{\leq\omega} \to B^{\leq\omega}$ следующим образом: $\overline{\varphi}(q_1, a) = q, \overline{\psi}(q_1, a) = b$, где $q\colon \subseteq \mathbb{N}_0 \to Q$ и $b\colon \subseteq \mathbb{N}_0 \to B$ удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} q(0) = q_1 \\ b(t) = \psi(q(t), a(t)) \\ q(t+1) = \varphi(q(t), a(t)) \end{cases}$$

Литовский Владислав Андреевич — аспирант кафедры математической теории интеллектуальных систем механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова, e-mail: vlad-litov@mail.ru.

Litovskiy Vladislav Andreevich — PhD student, Department of Mathematical Theory of Intelligent Systems, Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

Инициальным конечным автоматом называется упорядоченная пара $(\mathcal{V}, q_1)$, где $\mathcal{V}$ — конечный автомат, а $q_1 \in Q$ — одно из его состояний, называемое начальным состоянием. Для инициального автомата определяем унарные отображения $\overline{\varphi}\colon A^{\leq\omega} \to Q^{\leq\omega}, \overline{\psi}\colon A^{\leq\omega} \to B^{\leq\omega}$ как $\overline{\varphi}(a) = \overline{\varphi}(q_1, a), \overline{\psi}(a) = \overline{\psi}(q_1, a)$.

Конечным автоматом с остановками называется упорядоченная шестёрка $(Q, A, B, \varphi, \psi, \psi')$, где

- A, B и Q — непустые конечные алфавиты, называемые соответственно *входным*, *выходным* и *внутренним алфавитами* (Q также часто называется *множеством состояний*, а его символы — *состояниями*);
- $\varphi\colon Q \times A \to Q$, $\psi\colon Q \times A \to B$ и $\psi'\colon Q \times A \to \{0, 1\}$ — функции, называемые соответственно *функциями переходов*, *выходов* и *скорости*[1].

Для такого автомата определим отображения $\overline{\varphi}\colon Q \times A^{\leq\omega} \to Q^{\leq\omega}, \overline{\psi}\colon Q \times A^{\leq\omega} \to B^{\leq\omega}, \overline{\psi'}\colon Q \times A^{\leq\omega} \to \{0, 1\}^{\leq\omega}$ следующим образом: $\overline{\varphi}(q_1, a) = q, \overline{\psi}(q_1, a) = b, \overline{\psi'}(q_1, a) = b'$, где $q\colon \subseteq \mathbb{N}_0 \to Q$, $b\colon \subseteq \mathbb{N}_0 \to B$, $x\colon \subseteq \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, а также $a'\colon \subseteq \mathbb{N}_0 \to A$ и $b'\colon \subseteq \mathbb{N}_0 \to \{0, 1\}$ удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ q(0) = q_1 \\ a'(t) = a(x(t)) \\ b'(t) = \psi'(q(t), a'(t)) \\ b(t) = \psi(q(t), a'(t)) \\ x(t+1) = x(t) + b'(t) \\ q(t+1) = \varphi(q(t), a'(t)) \end{cases}$$

Инициальным конечным автоматом с остановками называется упорядоченная пара $(\mathcal{V}, q_1)$, где $\mathcal{V}$ — конечный автомат Мили с остановками, а $q_1 \in Q$ — одно из его состояний, называемое *начальным состоянием*. Для инициального автомата с остановками определяем унарные отображения $\overline{\varphi}\colon A^{\leq\omega} \to Q^{\leq\omega}, \overline{\psi}\colon A^{\leq\omega} \to B^{\leq\omega}, \overline{\psi'}\colon A^{\leq\omega} \to \{0, 1\}^{\leq\omega}$, как $\overline{\varphi}(a) = \overline{\varphi}(q_1, a), \overline{\psi}(a) = \overline{\psi}(q_1, a), \overline{\psi'}(a) = \overline{\psi'}(q_1, a)$. Параметр канонических уравнений q_1 для инициального автомата полагаем равным его начальному состоянию. Вновь для удобства последовательности из канонических уравнений для входной последовательности a будем обозначать как x, q, a', b', b, а для $\widehat{a}$ как $\widehat{x}, \widehat{q}, \widehat{a}', \widehat{b}', \widehat{b}$.

Назовём *входной кодировкой* отображение $g\colon X \to A^\omega$, *выходной кодировкой* отображение $h\colon B^\omega \to Y$. Будем говорить, что *инициальный автомат вычисляет функцию* $f\colon X \to Y$ *во входной кодировке* g *и выходной кодировке* h, если для всех $x \in X$

$$f(x) = h(\overline{\psi}(g(x))).$$

Далее мы ограничимся случаем $X = \mathbb{N}_0$, $Y = \mathbb{N}_\lambda$, $A = B = \{0,1\}$, а входную кодировку $E^{-1}\colon \mathbb{N}_0 \to \{0,1\}^\omega$ определим так:

$$E^{-1}(n) = 1^{n+1}0^\omega.$$

Определим выходную кодировку $E\colon \{0,1\}^\omega \to \mathbb{N}_\lambda$ следующим образом:

$$E(\alpha) = \begin{cases} n, & \text{если } \alpha \text{ имеет вид } 1^{n+1}0^\omega \text{ для некоторого } n \in \mathbb{N}_0, \\ \lambda, & \text{если } \alpha \text{ не имеет вида } 1^{n+1}0^\omega \text{ ни для какого } n \in \mathbb{N}_0. \end{cases}$$

Кодировка D определяется следующим образом: $D\colon \{0,1\}^\omega \to \mathbb{N}_\lambda$:

$$D(\alpha) = \begin{cases} n, & \text{если } \alpha \text{ имеет вид } 0^m1^{n+1}0^\omega \text{ для некоторых } m, n \in \mathbb{N}_0, \\ \lambda, & \text{если } \alpha \text{ не имеет вида } 0^m1^{n+1}0^\omega \text{ ни для каких } m, n \in \mathbb{N}_0. \end{cases}$$

Кодировка C определяется следующим образом: $C\colon \{0,1\}^\omega \to \mathbb{N}_\lambda$,

$$C(\alpha) = |\alpha|_1 - 1$$
$$C(0^\omega) = C(1^\omega) = \lambda$$

Множество функций $f\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_\lambda$, периодических с предпериодом как последовательности, обозначим за $\mathscr{A}_0$. Введём также важный класс $\mathscr{P}_\varepsilon$. Будем рассматривать функции $f\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_\lambda$, удовлетворяющие следующему условию:

Существует такое число $m \in \mathbb{N}_0$, *что для всех* $n \leq m$ *выполнено* $f(n) \geq n$ *или* $f(n) = \lambda$, *а для всех* $n > m$ *выполнено* $f(n) = m$ *или* $f(n) = \lambda$.

Класс всех функций, удовлетворяющих такому условию, будем обозначать за $\mathscr{P}_\varepsilon$. Класс $\mathscr{A}_\varepsilon$ определим как $\mathscr{P}_\varepsilon \cap \mathscr{A}_0$.

Назовём функцию $f\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_\lambda$ периодической с постоянным смещением $N \in \mathbb{N}_{\not\vdash}$, периодом $T \in \mathbb{N}$ и предпериодом $T \in \mathbb{N}_0$, если

$$\forall n \geq T\colon f(n+T) = f(n) + T$$

За $\mathscr{A}_1$ обозначим класс всех функций $f\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_\lambda$, являющихся периодическими с постоянным смещением. За $\mathscr{A}_1^{T \leq N}$ обозначим подкласс $\mathscr{A}_1$

функций таких, что для них существует пара «длина периода — постоянное смещение» T, N такая, что $T \leq N$; за $\mathscr{A}_1^{T=N}$ обозначим подкласс $\mathscr{A}_1$ функций таких, что для них существует пара T, N такая, что $T = N$; за $\mathscr{A}_1^{T\geq N}$ обозначим подкласс $\mathscr{A}_1$ функций таких, что для них существует пара T, N такая, что $T \geq N$.

Определим класс $\mathscr{P}_U$ как класс функций $f\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_\lambda$ таких, что для любого n либо $f(n) \geq n$, либо $f(n) = \lambda$. Определим классы $\mathscr{A}_{1,U}$, $\mathscr{A}_{1,U}^{T\leq N}$, $\mathscr{A}_{1,U}^{T=N}$ и $\mathscr{A}_{1,U}^{T=N=1}$ как:

$$\begin{aligned}\mathscr{A}_{1,U} &= \mathscr{A}_1 \cap \mathscr{P}_U,\\ \mathscr{A}_{1,U}^{T\leq N} &= \mathscr{A}_1^{T\leq N} \cap \mathscr{P}_U,\\ \mathscr{A}_{1,U}^{T=N} &= \mathscr{A}_1^{T=N} \cap \mathscr{P}_U\end{aligned}$$

2. Результаты

Теорема 1.

1. *Множество функций, вычислимых конечным автоматом в E-кодировке, есть* $\mathscr{A}_\varepsilon \cup \mathscr{A}_{1,U}^{T=N}$;
2. *Множество функций, вычислимых конечным автоматом в D-кодировке, есть* $\mathscr{A}_0 \cup \mathscr{A}_1^{T=N}$;
3. *Множество функций, вычислимых конечным автоматом в C-кодировке, есть* $\mathscr{A}_1^{T\geq N}$.

Теорема 2.

1. *Множество функций, вычислимых конечным автоматом с остановками в E-кодировке, есть* $\mathscr{A}_\varepsilon \cup \mathscr{A}_{1,U}^{T\leq N}$;
2. *Множество функций, вычислимых конечным автоматом с остановками в D-кодировке, есть* $\mathscr{A}_0 \cup \mathscr{A}_1^{T\leq N}$;
3. *Множество функций, вычислимых конечным автоматом с остановками в C-кодировке, есть* $\mathscr{A}_1$.

Список литературы

[1] M. O. Rabin, “Two-Way Finite Automata”, *Proceedings of the Summer Institute of Symbolic Logic* (Cornell, 1957), 1957, 366–369 .

Статья поступила 25 октября 2026 г.

Computing Numerical Functions by Certain Types of Automata

V. A. Litovskiy

This paper investigates countably-valued functions computed by classical automata and automata with stops. The properties of encodings that convert numbers into automaton input sequences and vice versa are examined. We identify the classes of functions computable by the specified types of automata under these encodings.

Keywords: computability, automaton.

References

[1] M. O. Rabin, "Two-Way Finite Automata", *Proceedings of the Summer Institute of Symbolic Logic* (Cornell, 1957), 1957, 366–369.

Received on October 25, 2026