О длине теста переходов конечного автомата

А. А. Куницын*

Рассматриваются замкнутые тесты переходов полного конечного детерминированного инициального автомата. Приведены известная точная общая оценка и семейство автоматов, на котором она достигается. Сформулирован критерий равенства минимальной длины теста числу переходов. Показано, что это равенство выполняется для сильно связных групповых автоматов и линейных автоматов над конечным полем.

Ключевые слова: конечный автомат, тест переходов, линейный автомат, эйлеров цикл.

1. Постановка задачи и общая оценка

Пусть $\mathcal{A} = (Q, X, \delta)$ — полный детерминированный конечный автомат, $N = |Q|$, $k = |X|$. Его граф переходов состоит из дуг вида $q \xrightarrow{x} \delta(q, x)$ для каждой пары $(q, x) \in Q \times X$. Петли и параллельные дуги учитываются с кратностями; всего дуг kN. Автомат называем *сильно связным*, если его граф переходов сильно связен. *Замкнутым тестом переходов* назовём входное слово, которое проходит все дуги и возвращает автомат в фиксированное начальное состояние. *Длина теста* равна числу пройденных дуг с учётом повторений.

Обозначим через $\ell(\mathcal{A})$ минимальную длину замкнутого теста переходов. При сильной связности эта величина не зависит от выбора начального состояния: начало замкнутого обхода можно циклически сдвинуть.

Известна следующая точная общая оценка.

Теорема 1 (Визинг–Гольдберг, [1])**.** *Для сильно связного полного автомата*

$$\ell(\mathcal{A}) \le kN + (k-1)\binom{N}{2}. \tag{1}$$

При любых $N, k \ge 1$ эта оценка достигается.

* *Куницын Александр Александрович* — аспирант кафедры математической теории интеллектуальных систем механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова, e-mail: sashakunitsyn2000@gmail.com, ORCID: 0000-0002-9994-9894.

Kunitsyn Aleksandr Aleksandrovich — PhD student, Department of Mathematical Theory of Intelligent Systems, Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

Функция переходов в экстремальном семействе автоматов с множеством состояний $Q = \{0, \ldots, N-1\}$ и входным алфавитом $X = \{0, \ldots, k-1\}$ задана следующим образом:

$$\delta(i, x) = \begin{cases} i + 1 \pmod N, & x = 0, \\ 0, & x \neq 0. \end{cases}$$

На рис. 1 показано семейство, на котором достигается оценка (1).

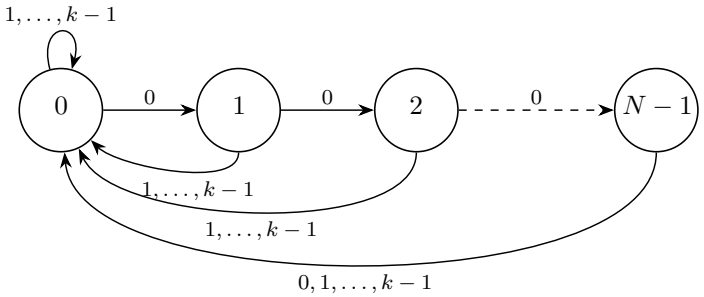


Рис. 1: Экстремальное семейство автоматов. Дуга с несколькими метками обозначает параллельные переходы; пунктир — пропущенную часть цикла.

2. Эйлеровы графы переходов

Ориентированный мультиграф называется *сбалансированным*, если входящая и исходящая степени каждой вершины совпадают.

Теорема 2. *Для полного сильно связного автомата равенство* $\ell(\mathcal{A}) = kN$ *выполняется тогда и только тогда, когда его граф переходов сбалансирован.*

Доказательство. Любой тест должен пройти все kN дуг, поэтому $\ell(\mathcal{A}) \geq kN$. Если граф сбалансирован, то по классическому критерию эйлеровости в силу сильной связности он имеет эйлеров цикл. Его метки образуют замкнутый тест длины kN. Обратно, замкнутый тест длины kN проходит каждую дугу ровно один раз. В таком обходе число входов в каждую вершину равно числу выходов из неё, поэтому граф сбалансирован. □

Автомат называется *групповым*, если для каждого входного символа $x \in X$ отображение $q \mapsto \delta(q, x)$ является перестановкой множества состояний Q.

Следствие 1. *Если полный групповой автомат сильно связен, то* $\ell(\mathcal{A}) = kN$.

Доказательство. Для каждого состояния q' и каждого символа x существует ровно одно состояние q, для которого $\delta(q, x) = q'$. Поэтому входящая степень каждой вершины равна k, как и исходящая. Граф сбалансирован, и применима теорема 2. □

3. Линейный автомат

Рассмотрим стандартную линейную модель [2] над конечным полем $\mathbb{F}_r$ из r элементов. Множество состояний равно $Q = \mathbb{F}_r^n$, входной алфавит — $X = \mathbb{F}_r^m$, а функция переходов имеет вид

$$\delta(q, x) = Aq + Bx, \qquad A \in \mathbb{F}_r^{n\times n}, \quad B \in \mathbb{F}_r^{n\times m}. \tag{2}$$

Здесь $N = |Q| = r^n$ и $k = |X| = r^m$.

Напомним необходимые факты линейной алгебры. Для линейного отображения $T : E \to F$ конечномерных пространств над $\mathbb{F}_r$ его ядро и образ определяются равенствами $\operatorname{Ker} T = \{z \in E : Tz = 0\}$ и $\operatorname{Im} T = \{Tz : z \in E\}$. Теорема о ранге и дефекте даёт равенство

$$\dim E = \dim \operatorname{Ker} T + \dim \operatorname{Im} T. \tag{3}$$

Если $y \in \operatorname{Im} T$ и $Tz_0 = y$, то

$$T^{-1}(y) = z_0 + \operatorname{Ker} T, \qquad |T^{-1}(y)| = r^{\dim \operatorname{Ker} T}. \tag{4}$$

Действительно, равенство $Tz = Tz_0$ равносильно условию $z - z_0 \in \operatorname{Ker} T$. Следовательно, все непустые прообразы имеют одинаковую мощность.

Теорема 3. *Для сильно связного линейного автомата* (2) $\ell(\mathcal{A}) = kN = r^{n+m}$.

Доказательство. Функция переходов является линейным отображением $\delta : Q \oplus X \longrightarrow Q$, $\delta(q, x) = Aq + Bx$. Из сильной связности следует, что для каждого состояния $q' \in Q$ найдётся входящая в него дуга. Поэтому для каждого $q' \in Q$ существуют $q \in Q$ и $x \in X$, для которых выполняется равенство $\delta(q, x) = Aq + Bx = q'$. Следовательно, $\operatorname{Im} \delta = Q$. По теореме о ранге и дефекте (3)

$$\dim \operatorname{Ker} \delta = \dim(Q \oplus X) - \dim \operatorname{Im} \delta = (n + m) - n = m.$$

Число входящих в q' дуг равно числу пар (q, x), для которых $\delta(q, x) = q'$, то есть мощности прообраза $\delta^{-1}(q')$. В силу (4) этот прообраз является смежным классом по ядру $\operatorname{Ker}\delta$ и потому содержит столько же элементов, сколько само ядро:

$$|\delta^{-1}(q')| = |\operatorname{Ker}\delta| = r^{\dim \operatorname{Ker}\delta} = r^m = k.$$

Исходящая степень каждой вершины также равна k, так как $\delta(q, x)$ определена для каждого $x \in X$.

Итак, входящая и исходящая степени каждой вершины совпадают, то есть граф сбалансирован. По теореме 2 получаем $\ell(\mathcal{A}) = kN = r^{n+m}$. □

Список литературы

[1] В. Г. Визинг, М. К. Гольдберг, “О длине обхода сильно связного графа”, Англ. пер.: Cybernetics, 5:1–2 (1972), 95–98. DOI: 10.1007/BF01070669, *Кибернетика*, **5**:1 (1969), 79–82.

[2] A. Gill, *Linear Sequential Circuits: Analysis, Synthesis, and Applications*, McGraw-Hill, New York, 1966 .

Статья поступила 5 октября 2026 г.

On the length of a transition tour of a finite automaton

A. A. Kunitsyn

We consider closed transition tours of a complete finite deterministic automaton with a fixed initial state. We state a known sharp general bound and describe a family of automata attaining it. We give a criterion for the minimum tour length to equal the number of transitions and show that this equality holds for strongly connected permutation automata and linear automata over a finite field.

Keywords: finite automaton, transition tour, linear automaton, Eulerian circuit.

References

[1] V. G. Vizing, M. K. Gol’dberg, “The length of a circuit in a strongly connected graph”, English translation: Cybernetics, 5:1–2 (1972), 95–98 (In Russian). DOI: 10.1007/BF01070669, *Kibernetika*, **5**:1 (1969), 79–82.

[2] A. Gill, *Linear Sequential Circuits: Analysis, Synthesis, and Applications*, McGraw-Hill, New York, 1966.

Received on October 5, 2026