О вычислительных возможностях одномерных клеточных автоматов с локаторами

Г. В. Калачев*

В работе исследуются вычислительные возможности одномерных клеточных автоматов с локаторами (КАсЛ). Вводится определение вычисления функции при помощи КАсЛ и показывается, что в рамках данного определения класс задач, решаемых КАсЛ за полиномиальное время, совпадает с PSPACE. Нетривиальной частью этого результата является одномерный клеточный автомат с локаторами, решающий за полиномиальное время задачу проверки истинности булевых формул с кванторами.

Ключевые слова: клеточные автоматы с локаторами, вычислительная сложность, полиномиальное время, PSPACE.

1. Введение

Понятие клеточного автомата с локаторами (КАсЛ) можно найти в работе [1] с поправками в работе [2]. В этой модели, помимо обычного локального взаимодействия между соседними ячейками, имеется эфир: ячейки могут посылать в него сигналы, а затем получать суммарный сигнал из заданных направлений. Тем самым в модель клеточного автомата добавляется нелокальный механизм передачи информации.

Естественный вопрос состоит в том, насколько наличие локаторов усиливает вычислительные возможности одномерных клеточных автоматов. В данной работе показано, что существует одномерный клеточный автомат с локаторами, который за полиномиальное время решает задачу проверки истинности булевых формул с кванторами, которая является PSPACE-полной. С учетом того, что полиномиальное число тактов КАсЛ относительно размера начальной конфигурации моделируется с полиномиальной памятью, из этого следует, что класс задач, решаемых одномерными КАсЛ за полиномиальное время, совпадает с PSPACE.

Калачев Глеб Вячеславович — канд. физ.-мат. наук, с. н. с. лаборатории проблем теоретической кибернетики мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: gleb.kalachev@yandex.ru, ORCID: 0000-0003-2695-3179.

Kalachev Gleb Vyacheslavovich — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior Researcher, Laboratory of Problems of Theoretical Cybernetics, Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

2. Формулировка результата

Рассмотрим КАсЛ σ с множеством состояний Q и алфавитом вещания G, $\perp \in Q$ — состояние покоя, $e \in G$ — нейтральный элемент. Для слова $s \in Q^*$ через $\mathrm{FState}\,(s)$ обозначим состояние, в котором слово s записано начиная с нулевой клетки вправо, а остальные клетки находятся в состоянии покоя $\perp$, и при этом состояние эфира равно e в любой клетке.

Пусть есть некоторые конечные алфавиты A, B и частичная функция $f : A^* \to B^*$ с областью определения $\mathcal{D}(f)$. Скажем, что КАсЛ σ с множеством состояний $Q_\sigma \supset \{S_\sigma, F_\sigma\}$ вычисляет функцию f, если существуют вложения

$$\iota_S : A \to Q_\sigma \setminus \{S_\sigma, F_\sigma\}, \qquad \iota_F : B \to Q_\sigma \setminus \{S_\sigma, F_\sigma\}$$

такие, что для любого $\alpha \in \mathcal{D}(f)$ при некотором $t \in \mathbb{N}$ выполнено

$$\Phi^t(\mathrm{FState}\,(S_\sigma\, \iota_S(\alpha))) = (\mathrm{FState}\,(F_\sigma\, \iota_F(f(\alpha)))),$$

причём S_σ встречается только в начальный момент, а F_σ — только в момент времени t. Скажем, что σ распознаёт язык $L \subseteq A^*$, если он вычисляет характеристическую функцию $\chi_L : A^* \to \{0, 1\}$, $\chi_L(\alpha) = 1 \iff \alpha \in L$.

Пусть дана формула

$$\mathcal{F} = Q_n x_n \dots Q_1 x_1\, BF(x_1, \dots, x_n),$$

где $Q_i \in \{\exists, \forall\}$, а BF — булева формула в 3-КНФ. Множество таких формул обозначим $\mathtt{QCNF}$. КНФ BF можно задать кодом $\mathcal{C}_B(BF)$ над алфавитом $\{\neg, \wedge, \vee, 0, 1\}$: в 3-КНФ скобки опущены, а вместо переменных стоят их номера в двоичной записи. Булеву формулу $\mathcal{F}$ с кванторами можно задать в алфавите $\Sigma_{QB} := \{\exists, \forall, \neg, \wedge, \vee, 0, 1\}$ кодом $\mathcal{C}_{QB}(\mathcal{F}) := Q_n \dots Q_1 \mathcal{C}_B(BF)$.

Обозначим

$$\mathrm{Init}(\mathcal{F}) := \mathrm{FState}\,(S\, \mathcal{C}_{QB}(\mathcal{F}))\,,$$

$$\mathrm{Final}(\mathcal{F}) := \begin{cases} \mathrm{FState}\,(F\,\mathrm{Y})\,, & \text{если } \mathcal{F} \text{ истинна,} \\ \mathrm{FState}\,(F\,\mathrm{N})\,, & \text{если } \mathcal{F} \text{ ложна.} \end{cases}$$

Теорема 1. *Существуют полином p и одномерный клеточный автомат с локаторами $\sigma = (\mathbb{Z}, Q, V_1, G, +, L, \phi, \psi)$, $Q \supset \Sigma_{QB} \cup \{\perp, S, F, \mathrm{Y}, \mathrm{N}\}$, такие, что для любой формулы $\mathcal{F} \in \mathtt{QCNF}$ существует такое $t \le p(|\mathcal{F}|)$, что*

$$\Phi^t(\mathrm{Init}(\mathcal{F})) = \mathrm{Final}(\mathcal{F}),$$

причём состояние F встречается только в момент t, а состояние S — только в начальный момент.

Теорема 2. *Класс языков, распознаваемых одномерными КАсЛ за полиномиальное время, совпадает с* PSPACE.

Опишем идею работы алгоритма в теореме 1. Истинность формулы мы будем вычислять непосредственно по определению. Таким образом, нам требуется вычислить булеву формулу BF на всех 2^n наборах значений переменных, а затем собрать результат по кванторам $Q_1, \ldots, Q_n$. Для того, чтобы вычислять значения параллельно, нам необходимо создать копии конфигураций, кодирующих формулу BF (она одна и та же во всех копиях), а также у каждой копии свой двоичный номер, по которому можно восстановить значения переменных и вычислить значение формулы. Эта часть достаточно стандартная: 2^t копий создаётся за время $O(t)$+размер конфигурации с использованием полугруппы $\{0,1\}^2$ с операцией $(\oplus, \max)$. Параллельный запуск вычисления во всех копиях также является стандартным. Самая нетривиальная часть алгоритма — сбор результатов по альтернирующим кванторам. Поскольку автомат у нас одномерный, то все сигналы в эфире, передаваемые разными копиями, будут суммироваться и в общем случае не будут независимыми. При этом на каждом шаге нам требуется вычислять много независимых конъюнкций или дизъюнкций от разных пар копий. Основная идея здесь — использовать групповую операцию $\oplus$, и для каждой пары делать 2 идентичные копии, которые будут функционировать идентично и отправлять в эфир одно и то же, тогда сигналы этих копий взаимно уничтожатся и не будут засорять эфир вне отрезка с этими копиями. Это позволит внутри каждой пары использовать эфир независимо от других пар, объединяемых на данном шаге. Поскольку для n кванторов выполняются n операций объединения, то помимо 2^n наборов получается ещё 2^n дублирований, и таким образом изначально суммарно нам потребуется 4^n копий вместо обычных 2^n. Таким образом, алгоритм существенно использует $O(4^n \cdot (n + |BF|))$ ячеек памяти и работает за время, полиномиальное от длины входа $(n + |BF|)$. По сути, время равно $O(n)$+(время вычисления BF на фиксированном входе машиной Тьюринга). При этом следует отметить, что в некоторые моменты при создании копий активно бесконечное число ячеек памяти, состояния которых образуют периодическую последовательность.

Отметим, что здесь в двух местах существенно используются неидемпотентные операции. Можно показать, что экспоненциальное раздувание начальной конфигурации в таких КАсЛ невозможно, и выполнено следующее утверждение.

Утверждение 1. *Класс языков, распознаваемых одномерными* идемпотентными *КАсЛ за полиномиальное время, совпадает с* P.

Таким образом, как и в [3], здесь проявляются существенные ограничения вычислительных возможностей одномерных идемпотентных КАсЛ.

Список литературы

[1] Э. Э. Гасанов, "Клеточные автоматы с локаторами", *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **24**:2 (2020), 119–132.

[2] Г. В. Калачев, "Замечания к определению клеточного автомата с локаторами", *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **24**:4 (2020), 47–56.

[3] Э. Э. Гасанов, "О слабости одномерных идемпотентных клеточных автоматов с локаторами", *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **30**:3 (2026), 151–169.

Статья поступила 30 октября 2026 г.

On the Computational Capabilities of One-Dimensional Cellular Automata with Locators

G. V. Kalachev

We study the computational power of one-dimensional cellular automata with locators. We formalize function computation in this model and prove that the languages recognizable in polynomial time are exactly those in PSPACE. The key step is the construction of a one-dimensional cellular automaton with locators that solves the quantified Boolean formula problem in polynomial time.

Keywords: cellular automata with locators, computational complexity, polynomial time, PSPACE.

References

[1] E. E. Gasanov, "Cellular automata with locators", *Intelligent Systems. Theory and Applications*, **25**:5 (2021), 15–26.

[2] G. V. Kalachev, "Remarks on the definition of cellular automaton with locators", *Intelligent Systems. Theory and Applications*, **25**:5 (2021), 45–53.

[3] E. E. Gasanov, "On the Weakness of One-Dimensional Idempotent Cellular Automata with Locators", *Intelligent Systems. Theory and Applications*, **30**:3 (2026), 151–169.

Received on October 30, 2026