Нахождение середины отрезка с помощью одномерного идемпотентного автомата с локаторами

Д. Э. Ибрагимова*

В данной статье рассматривается применение одномерного клеточного автомата с локаторами, у которого полугруппа, заданная на алфавите вещания, является идемпотентным моноидом, к задаче нахождения середины отрезка.

Ключевые слова: идемпотентные клеточные автоматы с локаторами, верхняя и нижняя оценки, нахождение середины отрезка.

1. Постановка задачи и формулировка результата

В работе Гасанова Э. Э. [2] было введено понятие клеточного автомата с локаторами (КАсЛ), которое отличается от понятия обычного клеточного автомата тем, что допускает передачу информации не только между соседними клетками, но и на любое расстояние посредством передачи сигналов из алфавита вещания в эфир. Сформулируем задачу нахождения середины отрезка длиной $N \in \mathbb{N}$. Пусть на $\mathbb{Z}$ задано начальное состояние $I_0(0, N) = (g_0, f_0)$ клеточного автомата, удовлетворяющее следующим условиям:

1. ячейке с координатой 0 присвоено состояние B, то есть $f_0(0) = B$;
2. ячейке с координатой N присвоено состояние E, то есть $f_0(N) = E$ $(N \geq 2)$;
3. остальным ячейкам присвоено состояние q_0, являющееся состоянием покоя;
4. все ячейки не посылают в эфир сигналы, то есть для любой ячейки $a \in \mathbb{Z}$ выполнено $g_0(a) = e$.

Решением задачи нахождения середины отрезка длиной N, соответствующей начальному состоянию $I_0(0, N)$, назовём состояние $I_F(0, N) = (g_F, f_F)$ автомата, удовлетворяющее следующим условиям:

* *Ибрагимова Дильноза Эльдаровна* — старший преподаватель, филиал МГУ имени М. В. Ломоносова в г. Ташкенте, e-mail: ibragimova70@mail.ru.

Ibragimova Dilnoza Eldarovna — Senior Lecturer, Lomonosov Moscow State University Branch in Tashkent.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

1. ячейка с координатой 0 находится в состоянии B_F;
2. ячейка с координатой N находится в состоянии E_F;
3. ячейка с координатой $\lfloor N/2 \rfloor$ находится в состоянии M;
4. остальные ячейки находятся в состоянии покоя q_0;
5. все ячейки не посылают в эфир сигналы, то есть для любой ячейки $a \in \mathbb{Z}$ выполнено $g_F(a) = e$.

Скажем, что КАсЛ σ решает задачу нахождения середины отрезка длиной N, если для любого натурального числа N из начального состояния $I_0(0, N)$, соответствующего задаче, он переходит в финальное состояние $I_F(0, N)$.

2. Описание алгоритма

Дадим неформальное описание одномерного идемпотентного КАсЛ, который будет решать задачу нахождения середины отрезка длиной N.

Ячейку с координатой 0 назовём началом отрезка, и она в начальный момент будет находиться в состоянии B. Ячейку с целой координатой $N \geq 2$ назовём концом отрезка, и она в начальный момент будет находиться в состоянии E. Остальные ячейки в начальный момент находятся в состоянии покоя q_0. В состоянии покоя ячейки не посылают никаких сигналов.

Алфавит состояний $Q = \{q_0, q_1, L, R, B, E, B_F, E_F, M, M_0\}$, q_0 — состояние покоя, алфавит вещания $G = \{0, 1, 2\}$, полугрупповая операция — максимум. $e = (0)$ — нейтральный элемент полугруппы G, шаблон локаторов стандартный $\mathcal{L} = \{\nu_{-1}, \nu_1\}$.

На первом такте ячейки B и E переходят в состояния B_F и E_F соответственно и посылают сигнал (1). Ячейка q_0, левым соседом которой является ячейка B, а правым соседом - q_0, переходит в состояние L. Ячейка q_0, правым соседом которой является ячейка E, а левым соседом - q_0, переходит в состояние R. Ячейка q_0, левым соседом которой является ячейка B, а правым соседом - E, переходит в состояние M_0.

На втором такте ячейки q_0, которые услышали сигнал (1) на оба локатора, то есть и справа, и слева, переходят в состояние q_1.

На последующих тактах ячейки q_1, у которых левым соседом является ячейка L, а правым соседом является ячейка q_1, переходят в состояние L. Те ячейки q_1, у которых правым соседом является ячейка R, а левым соседом является ячейка q_1, переходят в состояние R.

В какой-то момент останется либо только одна ячейка в состоянии q_1, либо ни одной. Ячейка q_1, левым соседом которой является ячейка L,

а правым соседом — R, переходит в состояние M_0. Если же не осталось ни одной ячейки в состоянии q_1, то ячейка L, у которой левым соседом является ячейка L или ячейка B_F, а правым соседом является ячейка R, переходит в состояние M_0. Ячейка M_0 посылает сигнал (2). На следующем такте ячейки L и R, услышав сигнал (2), переходят в состояние q_0, а ячейка M_0 переходит в состояние M. Пусть $N \in \mathbb{N}$. Обозначим через $T(N)$ — время, за которое любой клеточный автомат с локаторами решает задачу нахождения середины отрезка длины N. Докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Существует одномерный идемпотентный клеточный автомат с локаторами σ, такой, что он решает задачу нахождения середины отрезка длины N и для любого натурального числа N выполнено $T(N) \leq \lfloor (N+1)/2 \rfloor + 2$. И любой одномерный идемпотентный клеточный автомат с локаторами, решающий задачу нахождения середины отрезка длины N, работает не менее чем за $\lfloor N/2 \rfloor$ тактов. Здесь $\lfloor N/2 \rfloor$ — целая часть от деления N на 2.*

Доказательство. Если длина отрезка N, то число ячеек равно $S = N+1$. Искомая середина — ячейка с координатой $\lfloor N/2 \rfloor$. В описанном выше алгоритме первый такт используется для начальной рассылки сигнала и перехода концов в состояния B_F и E_F. Также на первом такте ячейки, прилегающие к концам отрезка B и E, переходят в состояния L и R соответственно. Обозначим через $k = \lfloor S/2 \rfloor$ целую часть половины числа ячеек, будем считать, что $S > 3$ (для случая $N = 2$ задача решается за 2 такта). После второго такта получаем конфигурацию

$$B_F, L, \underbrace{q_1, \ldots, q_1}_{N-3}, R, E_F.$$

Далее фронты L и R движутся навстречу друг другу: крайняя левая ячейка в состоянии q_1 переходит в L, а крайняя правая — в R. Все остальные ячейки q_1 остаются в этом состоянии. После каждого такого такта длина участка из ячеек q_1 уменьшается на две.

Случай 1: $S = 2k+1$. После k-го такта единственная оставшаяся ячейка q_1 имеет координату k. Её левый сосед находится в состоянии L, а правый — в состоянии R. На следующем такте эта ячейка переходит в состояние M_0. Таким образом, середина найдена за $k+1$ тактов.

Случай 2: $S = 2k$. После k-го такта ячеек q_1 уже не остаётся. Состояния L и R непосредственно соседствуют, причём левая из двух центральных ячеек находится в состоянии L, её левый сосед находится в состоянии L или B_F, а правый сосед — в состоянии R. На следующем такте эта

левая центральная ячейка переходит в состояние M_0 и посылает сигнал (2).

Итак, в обоих случаях середина найдена за $k+1$ тактов. На следующем такте сигнал (2) слышат ячейки в состояниях L и R и переходят в q_0; ячейка M_0 переходит в состоянии M; ячейки вне отрезка остаются в состоянии q_0. Следовательно, на этом такте получается требуемая финальная конфигурация. Получаем требуемую верхнюю оценку $T(N) \leq \lfloor (N+1)/2 \rfloor + 2$. Доказательство нижней оценки является естественным следствием леммы 1 о накачке, приведенной в статье Гасанова Э. Э. [1]. □

Список литературы

[1] Э. Э. Гасанов, "О слабости одномерных идемпотентных клеточных автоматов с локаторами", *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **30**:3 (2026), 151–169.

[2] Э. Э. Гасанов, "Клеточные автоматы с локаторами", *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **24**:2 (2020), 120–133 .

Статья поступила 5 ноября 2026 г.

Finding the Midpoint of a Line Segment Using a One-Dimensional Idempotent Cellular Automaton with Locators

D. E. Ibragimova

This paper considers the application of a one-dimensional cellular automaton with locators, whose broadcast alphabet is equipped with an idempotent monoid structure, to the problem of finding the midpoint of a line segment.

Keywords: idempotent cellular automata with locators, upper and lower bounds, midpoint finding.

References

[1] E. E. Gasanov, "On the Weakness of One-Dimensional Idempotent Cellular Automata with Locators", *Intelligent Systems. Theory and Applications*, **30**:3 (2026), 151–169 (in Russian).

[2] E. E. Gasanov, "Cellular Automata with Locators", *Intelligent Systems. Theory and Applications*, **24**:2 (2020), 120–133 (in Russian).

Received on November 5, 2026