О сложности задачи существования предельных циклов заданной длины

А. Дробышев*, Г. Боков‡

В работе исследуется вычислительная сложность задачи существования предельных циклов фиксированной длины k в булевых сетях с параллельной схемой обновления, локальные функции которых ограничены классами из решётки Поста. Для любого фиксированного $k \geqslant 2$ получена полная классификация сложности рассматриваемой задачи. Доказано, что задача является NP-полной для замкнутых классов, содержащих хотя бы один из классов D_2, F_2^∞, F_6^∞. Во всех остальных случаях задача полиномиально разрешима.

Ключевые слова: булевы сети, предельные циклы, решётка Поста, вычислительная сложность, классификация, NP-полнота.

1. Введение

Булевы сети представляют собой дискретные динамические системы, поведение элементов которых определяется булевыми функциями. Одной из первых моделей подобных систем была модель нейронной активности У. Маккаллока и В. Питтса [2]. Сеть из n элементов имеет 2^n конфигураций, поэтому её траектории со временем становятся периодическими, а полный перебор конфигураций требует экспоненциального времени.

В работе [3] доказана NP-полнота задачи существования предельного цикла фиксированной длины для общих булевых сетей. Для задачи существования неподвижной точки классификация сложности при ограничениях на локальные функции получена в [4]. В работе [1] получена частичная классификация сложности задачи существования предельных

Дробышев Александр — Лаборант лаборатории математических проблем искусственного интеллекта, механико-математический факультет, МГУ имени М. В. Ломоносова, e-mail: drobyshev.sanya@yandex.ru, ORCID: 0009-0002-8881-8730.

Drobyshev Alexander — Laboratory Assistant, Laboratory of Mathematical Problems of Artificial Intelligence, Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

‡*Боков Григорий* — Заведующий лабораторией математических проблем искусственного интеллекта, механико-математический факультет, МГУ имени М. В. Ломоносова, e-mail: grigoriy.bokov@math.msu.ru, ORCID: 0000-0001-5715-0067.

Bokov Grigoriy — Head of the Laboratory of Mathematical Problems of Artificial Intelligence, Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

циклов заданной длины. В настоящей работе построены полиномиальные алгоритмы для классов P_6 и S_6, что завершает классификацию для любого фиксированного $k \geqslant 2$.

2. Основные понятия

Обозначим через $E_2 = \{0, 1\}$ множество булевых значений, а через $[n] = \{1, \ldots, n\}$. Пусть $f_1, \ldots, f_n$ — булевы функции, где $f_i : E_2^n \to E_2, i \in [n]$.

Определение 1. Булевой сетью будем называть систему булевых функций $f_1, \ldots, f_n$, определяемую отображением $f : E_2^n \to E_2^n$, $f = (f_1, \ldots, f_n)$.

В дальнейшем будем рассматривать булевы сети с *параллельной схемой обновления*, при которой значения всех вершин изменяются одновременно в каждый дискретный момент времени.

Определение 2. Пространством конфигураций булевой сети f называется множество E_2^n.

Набор $x^{(t)} = (x_1^{(t)}, \ldots, x_n^{(t)}) \in E_2^n$ назовём конфигурацией сети в момент $t \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, где $x_i^{(t)}$ — значение вершины i в этот момент.

При параллельной схеме обновления конфигурации в соседние моменты времени связаны равенством $x^{(t+1)} = f(x^{(t)})$.

Последовательность конфигураций $x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots$ называется траекторией сети, начинающейся в конфигурации $x^{(0)}$.

Определение 3. Конфигурация $x \in E_2^n$ принадлежит предельному циклу длины k, если $f^k(x) = x$ и для любого $\ell \in \{1, \ldots, k-1\}$ выполняется $f^\ell(x) \neq x$.

Соответствующая последовательность $x, f(x), \ldots, f^{k-1}(x)$ образует предельный цикл длины k.

Обозначим через $\Phi_k(f)$ множество всех конфигураций, принадлежащих предельным циклам длины k:

$$\Phi_k(f) = \{x \in E_2^n \mid f^k(x) = x,\ \forall \ell \in \{1, \ldots, k-1\} \colon f^\ell(x) \neq x\}. \qquad (1)$$

Таким образом, булева сеть f имеет предельный цикл длины k тогда и только тогда, когда $\Phi_k(f) \neq \varnothing$.

3. Постановка задачи

Определение 4. Множество булевых функций называется замкнутым классом, если содержит все функции-проекции и замкнуто относительно операции суперпозиции. Через $[F]$ обозначим наименьший замкнутый класс, содержащий F. Если $[F] = C$, то F — базис класса C.

Для фиксированных $k \geqslant 2$ и конечного базиса F рассмотрим задачу k-**PLCE**(F): по булевой сети $f = (f_1, \ldots, f_n)$ с параллельной схемой обновления, в которой каждая функция $f_i \in [F]$ задана схемой из функциональных элементов в базисе F, определить, выполняется ли $\Phi_k(f) \neq \varnothing$. Для замкнутого класса $C = [F]$ будем также писать k-PLCE(C); выбор конечного базиса не влияет на полиномиальную разрешимость и NP-полноту задачи.

4. Основные результаты

Исследуем вычислительную сложность задачи k-PLCE(C) для замкнутых классов C из решётки Поста [5]. Рассмотрим следующие классы:

$$D_2 = [\{xy \vee xz \vee yz\}], \quad F_6^\infty = [\{x(y \vee z)\}], \quad F_2^\infty = [\{x \vee yz\}],$$
$$L_1 = [\{1, x \oplus y\}], \qquad P_6 = [\{0, 1, xy\}], \qquad S_6 = [\{0, 1, x \vee y\}].$$

Теорема 1. *Пусть C — произвольный замкнутый класс булевых функций с конечным базисом. Тогда для любого фиксированного $k \geqslant 2$ справедливы следующие утверждения:*

1. *Если выполнено хотя бы одно из включений $D_2 \subseteq C, F_6^\infty \subseteq C, F_2^\infty \subseteq C$, то задача k-PLCE(C) является NP-полной.*
2. *Если ни одно из указанных включений не выполнено, то C содержится хотя бы в одном из классов L_1, P_6, S_6, и задача k-PLCE(C) разрешима за полиномиальное время.*

Таким образом, получена полная классификация вычислительной сложности задачи существования предельного цикла фиксированной длины $k \geqslant 2$ для булевых сетей с параллельной схемой обновления. Из теоремы следует, что ограничение на локальные функции булевой сети может приводить как к полиномиальной разрешимости задачи, так и к сохранению её NP-полноты.

Список литературы

[1] А. С. Дробышев, “О вычислительной сложности задачи существования предельных циклов в булевых сетях с ограничениями из решётки Поста”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **30**:2 (2026), 28–54.

[2] W. S. McCulloch, W. Pitts, “A Logical Calculus of the Ideas Immanent in Nervous Activity”, *The Bulletin of Mathematical Biophysics*, **5**:4 (1943), 115–133.

[3] F. Bridoux, C. Gaze-Maillot, K. Perrot, S. Sené, "Complexity of Limit-Cycle Problems in Boolean Networks", *SOFSEM 2021: Theory and Practice of Computer Science*, Lecture Notes in Computer Science, **12607**, Springer, 2021, 135–146.

[4] S. Kosub, "Dichotomy Results for Fixed-Point Existence Problems for Boolean Dynamical Systems", *Mathematics in Computer Science*, **1**:3 (2008), 487–505.

[5] С. В. Яблонский, Г. П. Гаврилов, В. Б. Кудрявцев, *Функции алгебры логики и классы Поста*, Наука, Москва, 1966.

Статья поступила 26 октября 2026 г.

On the Complexity of the Limit-Cycle Existence Problem for a Prescribed Length

A. Drobyshev, G. Bokov

We study the computational complexity of the limit-cycle existence problem for a fixed length k in Boolean networks with the parallel update scheme and local functions restricted to classes of Post's lattice. For every fixed $k \geqslant 2$, a complete complexity classification is obtained. The problem is shown to be NP-complete for every closed class containing at least one of the classes D_2, F_2^∞, or F_6^∞. For all remaining closed classes, the problem is polynomial-time solvable.

Keywords: Boolean networks, limit cycles, Post's lattice, computational complexity, classification, NP-completeness.

References

[1] A. S. Drobyshev, "O vychislitel'noi slozhnosti zadachi sushchestvovaniya predel'nykh tsiklov v bulevykh setyakh s ogranicheniyami iz reshetki Posta", *Intellektual'nye sistemy. Teoriya i prilozheniya*, **30**:2 (2026), 28–54.

[2] W. S. McCulloch, W. Pitts, "A Logical Calculus of the Ideas Immanent in Nervous Activity", *The Bulletin of Mathematical Biophysics*, **5**:4 (1943), 115–133.

[3] F. Bridoux, C. Gaze-Maillot, K. Perrot, S. Sené, "Complexity of Limit-Cycle Problems in Boolean Networks", *SOFSEM 2021: Theory and Practice of Computer Science*, Lecture Notes in Computer Science, **12607**, Springer, 2021, 135–146.

[4] S. Kosub, "Dichotomy Results for Fixed-Point Existence Problems for Boolean Dynamical Systems", *Mathematics in Computer Science*, **1**:3 (2008), 487–505.

[5] S. V. Yablonsky, G. P. Gavrilov, V. B. Kudryavtsev, *Funktsii algebry logiki i klassy Posta*, Nauka, Moscow, 1966.

Received on October 26, 2026