Классификация однородных одномерных структур со стандартным шаблоном соседства

А. С. Гаспарян*

В работе рассматривается классификация бинарных одномерных однородных структур со стандартным шаблоном соседства. Выделяются умирающие структуры, в которых любая конечная конфигурация с течением времени переходит в пустую, строго периодические структуры, в которых любая конечная конфигурация повторяется через период, и бесконечно растущие структуры, в которых любая конечная конфигурация с течением времени заполняет всю прямую. Для каждого из трёх указанных классов найдены все однородные структуры, принадлежащие этому классу.

Ключевые слова: однородные структуры, клеточные автоматы, стандартный шаблон соседства, бесконечный рост, периодичность, умирание .

1. Определения

Будем использовать определение однородной структуры из работы [1]. Используется стандартный шаблон соседства, то есть клетка с координатой x имеет 2 соседа: левого — клетку с координатой $(x-1)$ и правого — клетку с координатой $(x+1)$. У бинарной одномерной однородной структуры ячейка может находиться в состоянии 1 (черная клетка) или 0 (белая клетка). Состояние клетки в следующий момент определяется её текущим состоянием и текущими состояниями её левого и правого соседа. Всего существует 2^3=8 комбинаций состояний трёх подряд идущих клеток, то есть 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111.

Под сокращением ОС в дальнейшем будем понимать произвольную бинарную одномерную однородную структуру.

Правилом перехода будем называть $abc \to d$, где $a, b, c \in \{0, 1\}$ — это состояния трёх подряд идущих клеток в произвольный момент времени t, а $d \in \{0, 1\}$ — это состояние в момент $t+1$, той клетки, которая в момент

Гаспарян Алина Сергеевна — студент, филиал Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова в г. Ташкенте, e-mail: alinagasparyan090805@gmail.com, ORCID: 0009-0003-6603-8909.

Gasparyan Alina Sergeevna — student, Lomonosov Moscow State University branch in Tashkent.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

времени t была в состоянии b. Легко видеть, что ОС однозначно задаётся восемью правилами перехода. Причём по определению ОС из работы [1] обязательно имеет место правило $000 \to 0$. Остальные 7 правил перехода могут быть заданы произвольно, таким образом, всего существует 2^7=128 ОС.

Пусть произвольная ОС задана правилами $000 \to a_1$, $001 \to a_2$, $010 \to a_3$, $011 \to a_4$, $100 \to a_5$, $101 \to a_6$, $110 \to a_7$, $111 \to a_8$, где $a_1 = 0$, а $a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8$ произвольные элементы множества $\{0, 1\}$. ОС, задаваемая вышеуказанными правилами перехода, кодируется числом $a_8a_7a_6a_5a_4a_3a_2a_1$ в двоичной записи. При переводе этого числа в десятичную запись получим номер ОС.

Конфигурация K_t — это состояние ОС в момент времени t с конечным числом ненулевых ячеек. Множество всех конфигураций будем обозначать $\mathcal{K}$, а $\mathcal{K}_+$ — множество всех конфигураций, исключая тождественно нулевую конфигурацию. Пусть задана ОС и начальная конфигурация K_0, тогда K_1 однозначно определяется правилами перехода. Легко видеть, что для любого момента $t > 0$ конфигурация в момент времени K_t однозначно определена правилами перехода.

Введем обозначения:
z — номер клетки.
$K_t(z)$ — состояние клетки z в момент времени t в процессе функционирования.
T— период, T_0—предпериод.

Определение 1. ОС называется умирающей, если
$\forall K_0 \in \mathcal{K}_+ \quad \exists t_0 \in \mathbb{N} \ \ \forall z \in \mathbb{Z} \ \ \forall t > t_0 \colon \ K_t(z) = 0.$

Определение 2. ОС называется строго периодической, если
$\forall K_0 \in \mathcal{K}_+ \ \ \exists T \in \mathbb{N} \ \ \exists T_0 \in \mathbb{N}_0 \ \ \forall t \geq T_0 \ \ : \ K_t = K_{t+T}.$

Определение 3. ОС называется бесконечно растущей, если
$\forall K_0 \in \mathcal{K}_+ \ \ \forall z \in \mathbb{Z} \ \ \exists t_0 \in \mathbb{N} \ \ \forall t > t_0 \colon \ K_t(z) = 1.$

2. Основные результаты

Теорема 1. *Множество умирающих бинарных однородных структур состоит из 12 ОС, каждая из которых*:
1) Обладает следующими четырьмя правилами перехода:
$000 \to 0$, $001 \to 0$, $010 \to 0$, $100 \to 0$.
2) Имеет два правила перехода одного из следующих трёх видов:

2.1) $011 \to 1,\ 110 \to 0$*;*
2.2) $011 \to 0,\ 110 \to 1$*;*
2.3) $011 \to 0,\ 110 \to 0$.
3) Имеет правила перехода $101 \to a,\ 111 \to b$*, где* $a, b \in \{0, 1\}$ *произвольные.*
Эти ОС имеют номера 0, 8, 32, 40, 64, 96, 128, 136, 160, 168, 192, 224.

Теорема 2. *Множество строго периодических ОС состоит из 32 ОС, каждая из которых*:
1) Обладает следующими правилами перехода:
$000 \to 0, \quad 100 \to 0, \quad 001 \to 0$.
2) Имеет правила перехода $010 \to a,\ 011 \to b,\ 110 \to c,\ 101 \to d,\ 111 \to e$*, где* $a, b, c, d, e \in \{0, 1\}$ *произвольные.*
Эти ОС имеют номера 0, 4, 8, 12, 32, 36, 40, 44, 64, 68, 72, 76, 96, 100, 104, 108,
128, 132, 136, 140, 160, 164, 168, 172, 192, 196, 200, 204, 224, 228, 232, 236.

Теорема 3. *Множество бесконечно растущих бинарных однородных структур состоит из единственной ОС. Это ОС номер 254, задаваемая правилами* $000 \to 0,\ 001 \to 1,\ 010 \to 1,\ 011 \to 1,\ 100 \to 1,\ 101 \to 1,\ 110 \to 1,\ 111 \to 1$.

Сравнение с ранее известными результатами

В работе [2] классификация включала в себя классы умирающих и периодических ОС, однако классификация давалась эмпирически и без доказательств. В работе [3] был определен класс умирающих ОС, совпадающий с результатом теоремы 1. При этом в [3] была доказана только необходимость соответствующих правил перехода. В настоящей работе установленно, что указанные условия являются не только необходимыми, но и достаточными для этого класса.

Благодарности

Автор выражает благодарность научному руководителю, старшему научному сотруднику Волкову Николаю Юрьевичу, за научное руководство, постановку задачи и внимание к работе, а также Литовскому Владиславу Андреевичу за ценные замечания по работе.

Список литературы

[1] В. Б. Кудрявцев, С. В. Алешин, А. С. Подколзин, *Теория автоматов*, 2-е, испр. и доп., Юрайт, М., 2019, 320 с.

[2] S. Wolfram, *A New Kind of Science*, Wolfram Media, Champaign, IL, 2002, 1197 pp.

[3] G. Braga, G. Cattaneo, P. Flocchini, C. Quaranta Vogliotti, "Pattern growth in elementary cellular automata", *Theoretical Computer Science*, **145** (1995), 1–26. DOI: 10.1016/0304-3975(94)00155-C.

Статья поступила 24 октября 2026 г.

Classification of homogeneous one-dimensional structures with a standard neighborhood pattern

A. S. Gasparyan

This paper considers a classification of binary one-dimensional homogeneous structures with a standard neighborhood template. Three types of structures are considered: dying, strictly periodic and infinitely growing. In dying structures every finite configuration becomes empty over time. In strictly periodic structures every finite configuration repeats itself after a period. In infinitely growing structures every finite configuration fills the whole line over time. For these three types of structures, all homogeneous structures belonging to each type have been found.

Keywords: homogeneous structures, cellular automata, a standard neighborhood template, infinite growth, strictly periodic, dying .

References

[1] V. B. Kudryavtsev, S. V. Aleshin, A. S. Podkolzin, *Theory of Automata*, 2nd, rev. and add., Yurayt, Moscow, 2019 (In Russian), 320 pp.

[2] S. Wolfram, *A New Kind of Science*, Wolfram Media, Champaign, IL, 2002, 1197 pp.

[3] G. Braga, G. Cattaneo, P. Flocchini, C. Quaranta Vogliotti, "Pattern growth in elementary cellular automata", *Theoretical Computer Science*, **145** (1995), 1–26. DOI: 10.1016/0304-3975(94)00155-C.

Received on October 24, 2026