Подсчет числа точек на плоскости клеточными автоматами с локаторами

Э. Э. Гасанов*, А. Е. Бобров‡

По плоскости разбросаны точки. Надо подсчитать число точек и дать ответ в двоичном виде. Показано, что эту задачу можно решить двумерными клеточными автоматами с локаторами за время, не превышающее $2[\log_2 n] + 7$, где n — число разбросанных точек.

Ключевые слова: подсчет числа точек, клеточные автоматы с локаторами.

1. Введение

Определение клеточных автоматов с локаторами можно найти в работах [1–3]. Особенность клеточных автоматов с локаторами заключается в том, что каждый элементарный автомат (называемый ячейкой) может посылать в эфир сигналы, и у каждой ячейки имеются локаторы, направленные в разные стороны. Каждый из локаторов позволяет получать на него суммарный сигнал всех автоматов с того направления, куда направлен локатор. Соответственно новое состояние автомата и посылаемый автоматом сигнал определяются значениями локаторов и состояниями соседей автомата. Посылаемые в эфир сигналы и наличие локаторов позволяют посылать информацию на большие расстояния, что сильно увеличивает вычислительные возможности клеточных автоматов с локаторами по сравнению с клеточными автоматами.

Исследуемая в данной работе задача состоит в том, чтобы представить в виде двоичной записи число активных ячеек (точек) на целочисленной плоскости. Для решения этой задачи используется алгоритм перевода числа из унарной записи в двоичную, который впервые для клеточных автоматов с локаторами был описан в работе [4]. Этим же алгоритмом

Гасанов Эльяр Эльдарович — д. ф.-м. н., зав. каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: el_gasanov@mail.ru, ORCID: 0000-0002-0739-0967.

Gasanov Elyar Eldarovich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Head of Department of Mathematical Theory of Intelligent Systems, Faculty of Mechanics and Mathematics, Moscow State University.

‡*Бобров Алексей Евгеньевич* — студ. магистратуры каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: aleksei.bobrov@math.msu.ru.

Bobrov Alexej Evgenevich — Master's student of Department of Mathematical Theory of Intelligent Systems, Faculty of Mechanics and Mathematics, Moscow State University.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

можно решить одномерную задачу подсчета числа точек. Для двумерного случая подсчет осуществляется в 2 этапа: сначала вычисляется индикатор нечетности числа точек на каждой горизонтали (строке), и этот индикатор проецируется на некую вертикаль, а затем считается индикатор числа точек на вертикали. Одновременно уменьшается вдвое число точек в каждой строке и на выделенной вертикали. В результате удается получить двоичное представление общего числа точек на плоскости за время, равное удвоенному логарифму числа точек плюс небольшая константа.

2. Постановка задачи и формулировка результата

Задача подсчета числа точек ставится следующим образом. Имеется двумерный клеточный автомат с локаторами. В начальной конфигурации некоторые ячейки находятся в состоянии “точка”, остальные ячейки находятся в состоянии покоя, причем число "точек"не менее 1. В конечной конфигурации появляется двоичное представление числа “точек” в начальной конфигурации, а все остальные ячейки оказываются в состоянии покоя, при этом одна из ячеек посылает в эфир сигнал “финиш”.

Теорема 1. *Существует двумерный клеточный автомат с локаторами с 4 локаторами-лучами, направленными на “север”, “юг”, “запад” и “восток”, и одним полным локатором, который решает задачу подсчета числа точек за время* $2[\log_2 n] + 7$*, где* n *— число “точек” в начальной конфигурации.*

3. Идея доказательства теоремы

Алфавит вещания будет равен $G = \{0, 1\}^2$, операцией по первой компоненте будет сложение по модулю 2, а по второй — max. Про ячейку, которая посылает в эфир сигнал $(1, 1)$, будем говорить, что она кричит. Под половиной будем понимать целую часть от деления на 2.

На первом этапе мы за 4 такта построим левые сумматоры, которые будут аккумулировать информацию о точках в строке. А именно в первый такт все “точки” кричат. Все ячейки, которые получают по второй компоненте сигнал 1 на два перпендикулярных локатора-луча, на следующий такт возбуждаются, переходя в состояние “вспомогательное”, при этом “точки” переходят в состояние “точка 2”. На втором такте появляются ячейки в состоянии “вспомогательное” и “точка 2”, они переходят в состояния “вспомогательное 2” и “точка 3” и посылают сигнал о крике на следующий такт. На третьем такте все ячейки, левее которых находятся

ячейки в состояниях “вспомогательное 2” или “точка 3”, и которые не слышат сигнал 1 по второй компоненте в локатор “запад”, переходят в состояние “левые сумматоры”. При этом ячейки в состоянии “вспомогательное 2” переходят в состояние покоя, а ячейки в состоянии “точка 3” — в состояние ‘точка 4”. Тем самым на 4 такте появятся “левые сумматоры”, а ячейки, которые в начальный момент были в состоянии ‘точка” окажутся в состоянии ‘точка 4”. Ячейку, находящуюся непосредственно под “левыми сумматорами”, переведем в состояние “результат” (это состояние появится на такте 5).

Второй этап будем разбивать на пары тактов, причем на каждой паре тактов будет вычисляться 1 бит двоичной записи числа и записываться в ячейку с состоянием “результат”, после этого “левые сумматоры” и “результат” будут сдвигаться на одну ячейку влево и начнется следующая пара тактов. Для простоты все ячейки в состоянии ‘точка 4” на втором этапе будем называть ‘точками”.

На первом такте пары все ячейки в состоянии “точка” кричат. Все “точки”, которые в локатор “восток” по первой компоненте слышат 0, переходят в состояние покоя. В результате в каждой строке число “точек” сократится вдвое. “Левые сумматоры”, которые в локатор “восток” слышат 1, на следующий такт будут кричать, сообщая, что в их строке нечетное число “точек”. Итак, на втором такте пары “левые сумматоры”, находящиеся в строках с нечетным числом “точек”, кричат. При этом кричащие “Левые сумматоры”, которые в локатор “север” слышат 0, переходят на следующий такт в состояние покоя, а которые слышат 1 — переходят в состояние “точка”. В результате за 2 такта остается половина “точек”. Ячейка “результат” слышит в локатор “север” 1, если число кричащих “левых сумматоров” нечетно, а это и есть индикатор нечетности числа “точек” в первом такте пары, т.е. это очередной бит в двоичной записи. Поэтому ячейка “результат” переходит в состояние “единица”, если слышит в локатор “север” 1, и в состояние “ноль”, если слышит 0. К следующему такту все “левые сумматоры” и “результат” сдвигаются на одну ячейку влево и начинается вычисление следующего бита в двоичной записи.

В результате, если в начальной конфигурации было n “точек”, то через $4 + 2[\log_2 n] + 2$ тактов все “точки” исчезнут, и ячейка, находящаяся в состоянии “результат”, услышит в полный локатор 0 по второй компоненте, и на следующий такт пошлет в эфир сигнал $(1, 0)$, который будем интерпретировать как сигнал окончания работы — “финиш”. При этом “левые сумматоры” и “результат” услышавшие в полный локатор 0 на следующий такт переходят в состояние покоя.

Список литературы

[1] Э. Э. Гасанов, "Клеточные автоматы с локаторами", *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **24**:2 (2020), 120–133.

[2] Калачев Г. В., "Замечания к определению клеточного автомата с локаторами", *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **24**:4 (2020), 47–56.

[3] Э. Э. Гасанов, "Клеточные автоматы с локаторами как модель устройств с беспроводной связью", *Математические вопросы кибернетики*, Вып 21, ФИЗМАТЛИТ, М, 2023, 5–51. DOI: 10.20948/mvk-2023-5.

[4] Васильев Д. И., "Поиск ближайшего соседа на прямой с помощью клеточного автомата с локаторами", *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **24**:3 (2020), 99–119.

Статья поступила 25 октября 2026 г.

Counting the number of points on a plane using cellular automata with locators

E. E. Gasanov, A. E. Bobrov

Points are scattered across a plane. The task is to count the number of points and provide the result in binary form. It has been shown that this problem can be solved using two-dimensional cellular automata with locators, in a time not exceeding $2\lceil \log_2 n \rceil + 7$, where n is the number of scattered points.

Keywords: counting the number of points, cellular automata with locators.

References

[1] E. E. Gasanov, "Cellular automata with locators", *Intelligent Systems: Theory and Applications*, **24**:2 (2020), 120–133 (in Russian).

[2] Kalachev G. V., "Remarks on the Definition of Cellular Automaton with Locators", *Intelligent systems. Theory and Applications*, **25**:5 (2021), 45–53.

[3] E. E. Gasanov, "Cellular automata with locators as a model for wireless communication devices", *Matematicheskie voprosy kibernetiki*, Issue 21, FIZMATLIT, M, 2023, 5–51. DOI: 10.20948/mvk-2023-5 (in Russian).

[4] Vasilev D. I., "The one-dimensional closest neighbor search problem solution using the cellular automata with locators", *Intelligent systems. Theory and Applications*, **25**:5 (2021), 27–43.

Received on October 25, 2026