Автоматные и вычислительные системы

Н. Ю. Волков*

Рассматривается три вида дискретных динамических систем: *автоматные системы*, *вычислительные системы* и *системы переходов*. Получены критерии эквивалентности для каждого вида систем. Решены задача моделирования систем каждого вида системами других видов и задача единственности такого моделирования.

Ключевые слова: автоматные системы, вычислительные системы, системы переходов, сильная эквивалентность систем .

1. Введение

В теории алгоритмов известен ряд устройств, таких, как машины Тьюринга, счётчиковые и стековые машины, коллективы автоматов в лабиринтах и др. ([3, 4]). Каждое из них представляет собой конечный автомат (или несколько автоматов) с внешней памятью. В работе [1] все эти модели обобщены при помощи понятия *автоматной системы*. В работе [2] введено понятие *вычислительной системы*.

В настоящей работе изучены взаимосвязи между автоматными системами, вычислительными системами и системами переходов.

2. Определения

Автомат – это набор $\mathcal{A} = (A, Q, B, \varphi, \psi, Q_f)$, где A и B – входной и выходной алфавиты, Q – мн-во состояний, $Q_f \subseteq Q$ – мн-во финальных состояний, φ и ψ – функции переходов и выходов ($\varphi : (Q \setminus Q_f) \times A \to Q$ и $\psi : (Q \setminus Q_f) \times A \to B$). Множества A, B, Q – непустые и конечные. Если задано начальное состояние $q_0 \in Q$, автомат – *инициальный*, иначе – *неинициальный*.

Обозначим множество преобразований мн-ва X, т.е. мн-во всех **частичных** функций вида $h : X \to X$, таких, что $D(h) \neq \emptyset$, как $C(X)$. Пусть даны всюду определённые функции $\beta : X \to A$ и $\gamma : B \to C(X)$. β – *функция обзора*, она позволяет автомату «видеть» элементы X. γ –

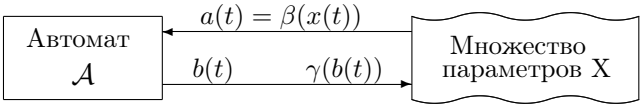
* *Волков Николай Юрьевич* — кандидат физ.-мат. наук, старший научный сотрудник Механико-математического ф-та МГУ, e-mail: volkov.nikolay.y@gmail.com.

Volkov Nikolay Yurievich — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior researcher, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

преобразователь, он позволяет автомату по каждому выходному символу b сделать некоторое преобразование множества X.

Автоматной системой (далее – АС) над X называется набор $S = (X, A, B, \beta, \gamma, \mathcal{A})$, где $\mathcal{A}$ – автомат, X – *мн-во параметров*, β – функция обзора, а γ – преобразователь ([1]). Состояниями АС называются состояния автомата $\mathcal{A}$. АС – *инициальная*, если $\mathcal{A}$ – инициальный.



Если АС находится в состоянии $q(t) \notin Q_f$ и преобразование $\gamma(b(t))$ определено на $x(t)$, АС меняет значение параметра с $x(t)$ на $x(t+1)$ и переходит в $q(t+1)$. Если АС находится в $q(t) \in Q_f$, она останавливается.

Функционирование АС задаётся каноническими уравнениями:

$q(1) = q_0, \quad x(1) = x_0, \qquad q(t+1) = \varphi(q(t), a(t)), \quad b(t) = \psi(q(t), a(t))$

$a(t) = \beta(x(t)), \qquad x(t+1) = \gamma(b(t))(x(t)), \qquad$ где $t \in \mathbb{N},\ q \in (Q \setminus Q_f)$.

При задании $x(1) = x_0$, инициальная АС порождает поведение $(x(1), q(1)), (x(2), q(2)), \ldots$. Если преобразование $\gamma(b(t))$ не определено на $x(t)$, последовательность поведения с такта $(t+1)$ равна λ (не определена).

АС называется всюду определённой, если все её поведения корректны, т.е. не содержат λ.

Тип АС – это множество всех АС вида $S = (X, A, B, \beta, \gamma, \mathcal{A})$ при фиксированных X, A, B, β, γ и произвольном автомате $\mathcal{A}$ с алфавитами A и B. Тип АС *различает мн-во* $X_1 \subseteq X$, если из $b_1 \neq b_2$ следует, что $\exists\, x \in X_1$, такое, что $\gamma(b_1)(x) \neq \gamma(b_2)(x)$. Свойство $Im(\beta) = A$ называется *неизбыточностью*. Для каждого $a \in A$ определим $X_a = \beta^{-1}(a)$.

Парная функция над мн-вом X – это пара частичных функций (f, g), где $f : X \to (X \cup \{\lambda\})$, $g : X \to (\mathbb{N} \cup \{\lambda\})$, области определений f и g совпадают и $|Im(g)| < \infty$ ([2]). Парные ф-ции (f, g) и (f', g') – *эквивалентны* на мн-ве $M \subseteq X$ относительно биекции $\pi : g(M) \to g'(M)$ (обозначаем $(f, g) \sim_{M,\pi} (f', g')$), если $\forall\, x \in M \ \ f(x) = f'(x)$ и $\pi(g(x)) = g'(x)$ ([2]).

Вычислительной системой (далее – ВС) (обозначается V_ν) называется конечный граф ([2]) со свойствами:

1. Мн-во вершин Q занумеровано инъективной функцией $\nu : Q \to \mathbb{N}$;
2. Задано подмножество финальных вершин графа $Q_f \subseteq Q$;
3. Каждой нефинальной вершине q сопоставлена парная функция (f_q, g_q) над X, такая, что $Im(g_q) \subseteq Im(\nu)$;
4. $\forall\, q \in (Q \setminus Q_f)$, $\forall\, k \in Im(g_q)$ из q в вершину с номером k ведёт ребро с отметкой k. Других рёбер в графе нет.

Если выделена начальная вершина, ВС называется *инициальной*.

Системой переходов (далее – СП) над мн-вами X и Q называется $V = (X, Q, \Phi, Q_f)$, где $|Q| < \infty$, $Q_f \subseteq Q$, Φ – глобальная (частичная) функция переходов $\Phi : X \times (Q \setminus Q_f) \to X \times Q$. Если задан начальный элемент $q_0 \in Q$, система V называется *инициальной*.

Для ВС и СП их поведения определяются аналогично поведению АС.

Пусть даны неинициальные системы S и S', каждая из которых является АС, ВС или СП. Системы S и S' *сильно эквивалентны* ([1]) (обозначаем $S \approx S'$), если: $X = X'$, $Q = Q'$ и $\forall\, x_0 \in X$ и $\forall\, q_0 \in Q$, поведения S и S' при начальном значении параметра x_0 – равны. Для сильной эквивалентности инициальных систем друг другу, условие $Q = Q'$ можно заменить более слабым условием: $Q \cap Q' \neq \emptyset$. Условие $X = X'$ при этом сохраняется. Для инициальных систем $S \approx S'$, если $\forall\, x_0 \in X$ их поведения равны при старте каждой системы из своего начального состояния.

$\forall\, q \in Q$ определим мн-во $M_q = \{\ x \in X \mid \exists\, x_0 \in X$: поведение S при старте с x_0 содержит $(x, q)\}$. Состояния q, для которых $M_q \neq \emptyset$, называются *достижимыми*. Иные состояния – *недостижимые*.

3. Основные результаты

Пусть $X \neq \emptyset$. Для АС, ВС и СП над X верны следующие результаты.

Теорема 1. *(теорема о соответствии для неинициальных систем)*

1. *Для любой АС S существует единственная СП $V : V \approx S$.*
2. *Для любой ВС V_ν существует единственная СП $V : V \approx V_\nu$.*
3. *Для любых V – СП и ν – инъективн. нумерации состояний V, существует единств. ВС V_ν с нумерацией состояний $\nu : V_\nu \approx V$.*
4. *Для любой ВС V_ν существует АС S, такая, что $S \approx V_\nu$.*

Теорема 2. *(критерий сильн.эквив. неинициальных систем)*

1. *Для АС условие $S \approx S'$ выполнено тогда и только тогда, когда:*

   1.1) *Выполнены равенства $X = X'$, $Q = Q'$ и $Q_f = Q'_f$;*

   1.2) $\gamma(\psi(q, \beta(x)))(x) = \gamma'(\psi'(q, \beta'(x)))(x) \quad \forall\, x \in X, \forall\, q \in (Q \setminus Q_f)$;

   1.3) $\varphi(q, \beta(x)) = \varphi'(q, \beta'(x)) \quad \forall\, x \in X, \forall\, q \in (Q \setminus Q_f)$, *таких, что в п. 1.2) преобразование γ в правой части равенства – определено.*

2. *Если S и S' – всюду определённые АС одного и того же типа, который неизбыточен и $\forall a \in A$ различает мн-во X_a, то из $S \approx S'$ следует $S = S'$.*

3. *Для систем переходов V и V' условие $V \approx V'$ равносильно $V = V'$.*
4. *Для ВС V_ν и $V'_{\nu'}$, условие $V_\nu \approx V'_{\nu'}$ равносильно тому, что $V'_{\nu'}$ получена из V_ν перенумерацией состояний некоей биекцией π.*

Теорема 3. *Для инициальных систем (обе АС, обе ВС, или обе – СП) $S \approx S'$ тогда и только тогда, когда:*

1. *Выполнены равенства $X = X'$ и $q_0 = q'_0$;*
2. *множества достижимых состояний систем S и S' совпадают;*
3. *множества достижимых финальн. состояний S и S' совпадают;*
4. *Если S и S' – ВС, то $\exists$ перенумерация π множества их достижимых состояний, такая, что нумерация состояний системы S' получается из нумерации состояний системы S путём преобразования π и $\forall\, q \in (Q \setminus Q_f)$, где q – достижимо, верно $(f_q, g_q) \sim_{M_q,\pi} (f'_q, g'_q)$.*
5. *В других случаях $\forall\, q \in (Q \setminus Q_f)$, где q – достижимо, выполнено*
   - *Если S и S' – АС, то равенство 1.2) из Т.2 верно $\forall\, x \in M_q$, а равенство 1.3) из Т.2 верно $\forall\, x \in M_q$, таких, что в п. 1.2) преобразование γ в правой части равенства – определено;*
   - *Если S и S' – системы переходов, то $\Phi(x, q) = \Phi'(x, q)\ \ \forall x \in M_q$.*

Список литературы

[1] Н. Ю. Волков, “Автоматные системы”, *Международная конференция «Математика в созвездии наук». Тезисы докладов*, 2024, стр. 310–313.

[2] М. М. Илхомов, “Парные функции и вычислительные системы”, *Международная конференция «Математика в созвездии наук»*, 2024, стр. 322–324.

[3] Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С., *Введение в теорию автоматов*, Наука, Москва, 1985, 320 с.

[4] Джон Хопкрофт, Раджив Мотвани, Джеффри Ульман, *Введение в теорию автоматов, языков и вычислений*, Вильямс, Москва, 2008, 528 с.

Статья поступила 27 октября 2026 г.

Automata systems and computational systems

N. Y. Volkov

This paper considers three types of discrete dynamic systems. These are automata systems, computational systems and transition systems. The equivalence criteria have been obtained for each of these types of systems. For each considered type of systems the problem of modeling it by another kind of systems has been solved. The problem of uniqueness of such modeling has been solved also.

Keywords: Automata systems, computational systems, transition system, strong equivalence .

References

[1] N. Y. Volkov, "Automata systems", *International Conference «Mathematics in the constellation of sciences». Theses*, 2024, p. 310–313 (in Russian).

[2] M. M. Ilhomov, "Pair functions and computational systems", *International Conf. «Mathematics in the constellation of sciences»*, 2024 (in Russian).

[3] Kudryavtsev V. B., Aleshin S. V., Podkolzin A. S., *Introduction to automata theory*, Nauka, Moscow, 1985 (in Russian), 320 pp.

[4] John E. Hopcroft, Rajeev Motwani, Jeffrey D. Ullman., *Introduction to automata theory, languages, and computation*, 2008 (in Russian), 528 pp.

Received on October 27, 2026