Сложность задачи адресации идемпотентными клеточными автоматами с локаторами

Д. А. Бухарина*

Исследуется сложность задачи адресации для одномерных идемпотентных клеточных автоматов с локаторами. На бесконечной в обе стороны ленте рассматривается отрезок из $N+1$ размеченной клетки, вне которого все клетки находятся в состоянии покоя. Требуется по переданному адресу выделить клетку с этим адресом. Установлен порядок сложности: при константном числе состояний задача адресации разрешима за $O(\log N)$ шагов.

Ключевые слова: клеточные автоматы с локаторами, задача адресации, идемпотентность, сложность.

1. Введение

Клеточные автоматы с локаторами (КАсЛ) представляют собой расширение классической модели клеточных автоматов, в котором добавляется механизм глобальной передачи информации через «эфир». Каждая ячейка может посылать в эфир сигналы, а локаторы позволяют принимать суммарный сигнал от всех ячеек в заданном направлении. Определение модели и её базовые свойства можно найти в работе [1] с уточнениями в работе [2].

В работе [3] было показано, что идемпотентность операции агрегации сигналов в эфире ($x \oplus x = x$) существенно ограничивает вычислительные возможности одномерных КАсЛ. Однако этот результат был получен для случая, когда начальная конфигурация ленты является однородной (все клетки в состоянии покоя, кроме границ). В такой постановке автомат не может «различить» клетки по их состоянию, что и приводит к сильным нижним оценкам.

В данной работе рассматривается другая постановка: мы предполагаем, что начальная конфигурация ленты может быть произвольным образом размечена заранее. Это позволяет автомату «знать» структуру

* *Бухарина Дарья Анатольевна* — студ. каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: daria.bukharina@math.msu.ru, ORCID: 0009-0000-6203-9080.

Bukharina Daria Anatolevna — Student of Department of Mathematical Theory of Intelligent Systems, Faculty of Mechanics and Mathematics, Moscow State University.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

ленты с самого начала и обходить ограничения, связанные с идемпотентностью. Ниже показано, что в такой постановке задача адресации решается за логарифмическое время.

Автор выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю Эльяру Эльдаровичу Гасанову за ценные научные рекомендации, всестороннюю поддержку и внимание к работе, а также Глебу Вячеславовичу Калачеву за оказанную помощь, полезные замечания и содействие в процессе подготовки настоящей статьи.

2. Формулировка результата

Определение 1 (Задача адресации)**.** Дано $N = 2^n$ клеток на прямой, каждой сопоставлен уникальный адрес из $\{0, \dots, N-1\}$. Адрес передаётся процессором по битам, начиная со старшего; очередной бит $a_t \in \{0, 1\}$ подаётся только после сигнала готовности (**ready**) от автомата.

Требование корректности. После передачи всех n битов ровно одна клетка должна оказаться в финальном состоянии F, а все остальные — в состоянии покоя; финальной должна становиться клетка, изначально имевшая переданный адрес.

Теорема 1. *Для любого $N = 2^n$, $n \geq 1$, существует идемпотентный КАсЛ с константным числом состояний и такая начальная конфигурация, что задача адресации решается за $T = O(\log N)$.*

3. Идея доказательства теоремы 1

Основные компоненты автомата. Алфавит состояний $Q = \{\perp,\ 0,\ 1,\ P_0,\ P_1,\ L,\ R,\ M,\ \perp',\ S,\ S',\ F\}$, $|Q| = 12$. Шаблон соседства $V = \{-1, +1\}$. Алфавит сигналов $G = \{e,\ 0,\ 1,\ s_{\text{Start}},\ s_{\text{Ready}},\ s_{\text{Clear}}\}$. Операция агрегации $\oplus = \max$, локатор один — полный Ω. Состояние $\perp'$ является поглощающим до момента подачи сигнала очистки s_{Clear}. Сигнал s_{Clear} имеет наивысший приоритет и принудительно переводит все клетки (включая $\perp'$) в состояние покоя.

Блочная структура. Лента из $N + 1$ клетки делится на $q = N/k$ блоков длины $k = 2^s$, $s = \lceil \log_2 n \rceil + 1$, разделённых клетками S; $(N+1)$-я клетка тоже S. Первая клетка каждого блока находится в состоянии разделителя S. Далее в блоке хранится двоичный номер: старший бит — в состоянии указателя P_0/P_1, остальные $m-1$ битов ($m = \log_2 q = n - s$) — в состояниях $0/1$, хвост заполнен живыми пустыми клетками в состоянии $\perp$. При $N = 2, 4, 8$ лента — один блок клеток в состоянии M, первый этап отсутствует.

Этап 1: выбор блока. Первые m тактов процессор подаёт биты адреса. Указатель блока при совпадении бита передаёт эстафету правому соседу, при несовпадении переходит в поглощающее состояние $\perp'$, которое убивает по цепочке весь блок. Выживает ровно один блок; его указатель переходит в M, и волна M заполняет блок до разделителей.

Этап 2: деление пополам. От правого разделителя рождается граница R, по сигналу из эфира — левая граница L. Границы идут навстречу друг другу, встречаются посередине и посылают сигнал готовности; процессор подаёт очередной бит. При бите 1 умирает левая половина, при 0 — правая; активная зона уменьшается вдвое. После $n - m$ шагов остаётся одна клетка: она переходит в F, испускает сигнал очистки, и все остальные клетки возвращаются в состояние покоя.

Оценка времени. Для $N \geq 16$ время первого этапа $T_1 = m + (k - m - 2) = k - 2$. Время второго этапа $T_2 = k + 3s - 1$. Общее время $T = T_1 + T_2 + 1 = (k - 2) + (k + 3s - 1) + 1 = 2k + 3s - 2 = O(\log N)$. Для $N = 2, 4, 8$ первый этап отсутствует, оценка также остается верной.

Корректность доказывается индукцией по числу переданных битов: после t битов первого этапа живы блоки с префиксом $a_1 \dots a_t$, после j шагов второго — позиции с префиксом $a_1 \dots a_{m+j}$. Условие $k = 2^s$ гарантирует, что длина активной зоны на каждом шаге остаётся степенью двойки, поэтому границы L и R встречаются ровно посередине. Следовательно, в конце остаётся единственная клетка с полностью совпавшим адресом.

Список литературы

[1] Э. Э. Гасанов, “Клеточные автоматы с локаторами”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **24**:2 (2020), 119–132.

[2] Г. В. Калачев, “Замечания к определению клеточного автомата с локаторами”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **24**:4 (2020), 47–56.

[3] Э. Э. Гасанов, “О слабости одномерных идемпотентных клеточных автоматов с локаторами”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **30**:3 (2026), 151–169 .

Статья поступила 5 ноября 2026 г.

Complexity of the Addressation Problem for Idempotent Cellular Automata with Locators

D. A. Bukharina

We study the complexity of the addressation problem for one-dimensional idempotent cellular automata with locators. On a tape infinite in both directions, we consider a segment of $N + 1$ marked cells, outside of which all cells are in the quiescent state. Given a transmitted address, it is required to single out the cell with this address. We establish the order of complexity: with a constant number of states, the addressation problem is solvable in $O(\log N)$ steps.

Keywords: cellular automata with locators, addressation problem, idempotency, complexity.

References

[1] E. E. Gasanov, "Cellular automata with locators", *Intelligent Systems. Theory and Applications*, **25**:5 (2021), 15–26.

[2] G. V. Kalachev, "Remarks on the definition of cellular automaton with locators", *Intelligent Systems. Theory and Applications*, **25**:5 (2021), 45–53.

[3] E. E. Gasanov, "On the Weakness of One-Dimensional Idempotent Cellular Automata with Locators", *Intelligent Systems. Theory and Applications*, **30**:3 (2026), 151–169.

Received on November 5, 2026