О порождаемости A-предпредполных классов линейных автоматов

В. А. Бирюкова*

В работе рассматриваются классы линейных автоматов над полем E_2 с операторами композиции (K-замыкание) и аппроксимационного замыкания (A-замыкание). Для A-предпредполных классов (классов второго уровня решетки A-замкнутых классов) решается задача K-порождаемости. Доказано, что у 22 из 23 таких классов существует конечный базис, а оставшийся класс не является K-конечнопорожденным.

Ключевые слова: конечный автомат, линейный автомат, замкнутый класс, предполный класс, операции композиции, A-замыкание, K-конечнопорожденность, базисы замкнутых классов.

Введение

Пусть $V = (A, Q, B, \varphi, \psi, q_0)$ — инициальный абстрактный конечный автомат [1]. Он называется линейным, если найдутся $n, s \in \mathbb{N}$, $A = E_k^n$, $Q = E_k^s$, $B = E_k$, где E_k — поле Галуа из k элементов, а φ и ψ — линейные операторы k-значной логики. Класс линейных автоматов над E_2 обозначается через L_2. Далее рассматриваются K- и A-замыкания [1] подмножеств из L_2.

Согласно теореме А. Гилла [2], автомат f является линейным тогда и только тогда, когда он представим в виде

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i + \mu_0,$$

где $n \in \mathbb{N}$, $\mu_j \in E_2'(\xi)$ для всех $j = \overline{0, n}$. Здесь $E_2'(\xi)$ — кольцо формальных степенных рядов с коэффициентами из E_2, образующими периодическую (с возможным предпериодом) последовательность. Для ряда $\alpha \in E_2'(\xi)$ через $\alpha(t)$ обозначается коэффициент при ξ^t. Переменная x_i автомата f называется непосредственной, если $\mu_i(0) = 1$.

* *Бирюкова Вероника Андреевна* — соискатель кафедры Математической теории интеллектуальных систем (МаТИС), механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова, e-mail: biryukovaveronika@mail.ru, ORCID: 0009-0006-7590-9800.

Biryukova Veronika Andreevna — Applicant for the degree, Department of Mathematical Theory of Intelligent Systems, Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

Пусть Ω — множество двоичных последовательностей некоторой фиксированной длины S. Говорят, что автомат f сохраняет Ω, если при подаче на все его входы последовательностей из Ω выходная последовательность в первые S тактов также принадлежит Ω. Классы линейных автоматов, сохраняющих некоторое множество последовательностей Ω, $|\Omega| > 1$, будем обозначать $P(\Omega)$.

Согласно [3], в L_2 имеется ровно пять A-предполных классов:

$$T_0 = \{f \in L_2 \mid \mu_0(0) = 0\},$$
$$T_1 = \{f \in L_2 \mid \sum_{i=0}^{n} \mu_i(0) = 1\},$$
$$V_1 = \{f \in L_2 \mid f \text{ имеет не более одной непосредственной переменной}\},$$
$$V_0 = \{f \in L_2 \mid f \text{ имеет нечетное число непосредственных переменных}\},$$
$$M_1 = \{f \in L_2 \mid \forall\, i = \overline{1,n}\ \mu_i(1) = 0\}.$$

В работе [4] показано, что все они являются K- и A-конечнопорожденными. Также эти пять A-предполных классов составляют первый уровень решетки A-замкнутых классов, где нулевой уровень — сам класс L_2. На втором уровне располагаются классы, являющиеся A-предполными в классах первого уровня; их называют A-предпредполными.

Как показано в [5], второй уровень содержит ровно 23 различных класса: некоторые из них являются A-предполными сразу в нескольких классах первого уровня, а некоторые сравнимы по включению между собой.

Подклассы V_1: $V_{1,1} = \{f \in V_1 \mid$ если у f есть непосредственная переменная, то для остальных переменных x_i верно $\mu_i(1) = 0\}$;

$V_{1,2} = \{f \in V_1 \mid$ если у f есть непосредственная переменная, то $\mu_0(0) = 0\}$;

$V_{1,3} = \{f \in V_1 \mid f$ имеет ровно одну непосредственную переменную$\}$; при этом $V_{1,3} = V_1 \cap V_0$.

Подклассы V_0: $V_{0,1} = V_1 \cap V_0 = V_{1,3}$;
$V_{0,2} = \{f \in V_0 \mid \sum_{i=1}^{n} \mu_i(1) = 0\}$;
$V_{0,3} = \{f \in V_0 \mid \mu_0(0) = 0\}$; при этом $V_{0,3} = V_0 \cap T_0 = T_0 \cap T_1 = V_0 \cap T_1$;
$V_{0,4} = \{f \in V_0 \mid \sum_{i=1}^{n} \mu_i(1) = \mu_0(0)\}$.

Подклассы T_a $(a \in E_2)$: $T_{a,1} = T_a \cap V_0 = V_{0,3}$;
$T_{a,2} = T_a \cap V_1$; при этом $T_{a,2} \subset V_{1,2}$;
$T_{a,3} = T_a \cap M_1$;
$T_{a,4} = \{f \in T_a \mid f$ сохраняет последовательность $a1\}$;
$T_{a,5} = \{f \in T_a \mid f$ сохраняет последовательность $a0\}$.

Подклассы M_1:
$M_{1,1} = M_1 \cap V_1$; при этом $M_{1,1} \subset V_{1,1}$;
$M_{1,2} = M_1 \cap V_0$; при этом $M_{1,2} \subset V_{0,2}$;
$M_{1,3} = M_1 \cap T_0 = T_{0,3}$;
$M_{1,4} = M_1 \cap T_1 = T_{1,3}$;
$M_{1,5} = M_1 \cap P(\{00, 10\})$;
$M_{1,6} = M_1 \cap P(\{01, 11\})$;
$M_{1,7} = M_1 \cap P(\{00, 11\})$;
$M_{1,8} = M_1 \cap P(\{01, 10\})$;
$M_{1,9} = \{f \in M_1 \mid \forall\, i = \overline{1,n}\ \mu_i(2) = 0\}$;
$M_{1,10} = \{f \in M_1 \mid \forall\, i = \overline{1,n}\ \mu_i(3) = 0\}$;
$M_{1,11} = \{f \in M_1 \mid \forall\, i = \overline{1,n}\ \mu_i(2) = \mu_i(3)\}$.

Постановка задачи и основной результат

Для этих 23 классов рассматривается задача K-конечнопорожденности: требуется выяснить, для каких классов существует конечное порождающее множество относительно операций композиции, а для каких нет.

Теорема. Все A-предпредполные классы линейных автоматов в L_2, кроме $V_{1,1}$, являются K-конечнопорожденными.

Для каждого из 22 классов найдено конечное порождающее множество и доказано, что оно является базисом. Например, для класса $T_{1,3}$ базис имеет вид $\{\xi^3 x_1 + x_2 + x_3 + x_4,\ (1 + \xi^2)x,\ x + \xi,\ 1\}$.

Для $V_{1,1}$ показано, что он не K-конечнопорожденный класс. В доказательстве используется инвариант q — число переменных x_i, для которых $\mu_i(0) = 0$ и $\mu_i(1) = 1$. При операциях композиции q не увеличивается, тогда как в $V_{1,1}$ для любого $D \in \mathbb{N}$ есть автомат $\xi x_1 + \cdots + \xi x_D$, у которого $q = D$. Таким образом, класс $V_{1,1}$ является наиболее высоко расположенным в рассматриваемой решетке не K-конечнопорожденным классом.

Следствие. Каждый A-предпредполный класс в L_2, отличный от $V_{1,1}$, является A-конечнопорожденным.

Список литературы

[1] Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С., *Введение в теорию автоматов*, Наука, Москва, 1985, 320 с.

[2] Гилл А., *Линейные последовательностные машины*, Наука, Москва, 1974, 288 с.

[3] Часовских А. А., “О полноте в классе линейных автоматов”, *Математические вопросы кибернетики*, **3**, Наука, Москва, 1991, 140–166.

[4] Бирюкова В. А., "Задача K-конечнопорожденности для предполных классов линейных автоматов, составляющих A-критериальную систему в пространстве линейных автоматов", *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **26**:4 (2022), 109–133.

[5] Часовских А. А., Бирюкова В. А., "О полноте в аппроксимационно предполных классах линейных автоматов", *Дискретная математика*, 2026 (в печати).

Статья поступила 6 ноября 2026 г.

On generation of second-level A-closed classes of linear automata

V. A. Biryukova

The paper deals with classes of linear automata over the field E_2 under composition (K-closure) and approximation (A-closure) operators. The K-generation problem is solved for the classes that form the second level of the lattice of A-closed classes. It is proved that 22 of the 23 such classes have a finite basis, while the remaining class is not K-finitely generated.

Keywords: finite automaton, linear automaton, closed class, precomplete class, composition operations, A-closure, K-finite generation, bases of closed classes.

References

[1] Kudryavtsev V. B., Aleshin S. V., Podkolzin A. S., *Introduction to Automata Theory*, (In Russian), Nauka (Science), Moscow, 1985, 320 pp.

[2] Gill A., *Linear Sequential Machines*, (In Russian), Nauka, Moscow, 1974, 288 pp.

[3] Chasovskikh A. A., "On Completeness in the Class of Linear Automata", (In Russian), *Mathematical Problems of Cybernetics*, **3**, Nauka, Moscow, 1991, 140–166.

[4] Biryukova V. A., "The Problem of K-Finite Generation for Precomplete Classes of Linear Automata Constituting an A-Criterion System in the Space of Linear Automata", (In Russian), *Intelligent Systems. Theory and Applications*, **26**:4 (2022), 109–133.

[5] A. A. Chasovskikh, V. A. Biryukova, "On Completeness in Approximation-Precomplete Classes of Linear Automata", (In Russian), *Discrete Mathematics and Applications*, 2026 (to appear).

Received on November 6, 2026