О порядке автоматов с операцией суперпозиции.

Д. Н. Бабин*, Н. В. Муравьев‡

Если входной и выходной алфавиты инициального автомата совпадают, то число различных автоматов, получаемых суперпозицией исходного автомата с самим собой, может быть как конечным, так и бесконечным. Задача определения порядка конечного инициального автомата относительно суперпозиции алгоритмически неразрешима в общем случае, но для некоторых классов автоматов удается найти алгоритмы определения порядка.

Ключевые слова: автоматы Мили, классы Поста, алгоритмическая разрешимость.

Все определения взяты из книги [1]. Если в качестве элементов полугруппы использовать автоматы, у которых входной и выходной алфавиты совпадают, а операцией объявить суперпозицию автоматов, то мы получим интересный пример полугруппы конечно-автоматных функций. Определение порядка элемента в полугруппе является классической задачей в алгебре. В общем случае в полугруппе конечно-автоматных функций она алгоритмически неразрешима [2]. Алешин С.В. показал [3], что в группе одноместных линейных автоматов (конечно приведенных) над полем из двух элементов автомат имеет конечный порядок тогда и только тогда, когда его переходы безусловны. Критерий конечности порядка автомата был обобщён на многоместные линейные автоматы над любым полем [4] [5].

Пусть R некоторый класс Поста [6], автомат, функции переходов и выходов которого лежат в классе R, назовём R-автоматом. Решетку Поста можно разбить на две группы: классы с неразрешимой задачей определения порядка, и классы, с разрешимой задачей определения порядка. Для этого не требуется перебирать все классы Поста. Оказывается, что

* *Бабин Дмитрий Николаевич* — д.ф.-м.н., проф. каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: d.n.babin@mail.ru.

Babin Dmitry Nikolaevich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Prof., Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intellectual Systems.

‡ *Муравьев Никита Валерьевич* — аспирант каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: ne-ki-tos@yandex.ru.

Muravev Nikita Valerievich — graduate student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intellectual Systems.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

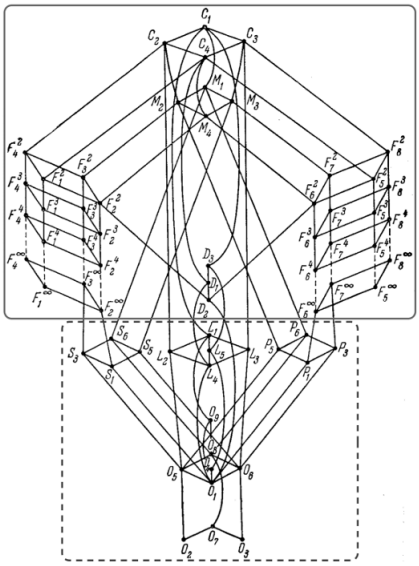


Рис. 1

свойство разрешимости определения порядка R-автомата наследственно выполняется в подклассах, а свойство неразрешимости — в надклассах исследуемого замкнутого класса R. Подобный подход был использован в работе [7]. Имеет место

Теорема 1. *[8]*

Задача определения порядка алгоритмически неразрешима в классе R-автоматов, если R содержит один из классов $F_2{}^\infty$, $F_6{}^\infty$, D_2. В противном случае задача определния порядка алгоритмически разрешима.

На рисунке решетка Поста замкнутых классов в P_2 (схема из [6]). Сплошным прямоугольником выделены классы, для которых алгоритмически неразрешима задача определения порядка в соответствующем классе автоматов. Пунктирным прямоугольником выделены классы, порождающие классы автоматов с разрешимой задачей определения порядка.

Список литературы

[1] Кудрявцев В.Б., Алешин С.В., Подколзин А.С., *Введение в теорию автоматов.*, Наука, Москва, 1985.

[2] P. Gillibert., “An automaton group with undecidable order and Engel problems”, *Journal of Algebra*, **497** (2018), 363–392. DOI: 10.1016/j.jalgebra.2017.11.049.

[3] Алёшин С.В., *Алгебраические системы автоматов*, МАКС пресс, Москва, 2016.

[4] Муравьев Н.В., “Оценки порядков линейных автоматов”, *Вестник Московского университета Серия 1: Математика, Механика.*, 2022, № 6, 8–14. DOI: 10.55959/msu0579-9368-1-2022-6-8-14.

[5] Муравьев Н.В., “Максимальные конечные порядки линейных автоматов над произвольным полем”, *Вестник Московского университета Серия 1: Математика, Механика.*, 2024, № 5, 71–73. DOI: 10.55959/msu0579-9368-1-65-5-9.

[6] Яблонский С.В., Гаврилов Г.П., Кудрявцев В.Б., *Функции алгебры логики и классы Поста.*, Наука, Москва, 1966.

[7] Бабин Д.Н., “О классификации автоматных базисов Поста по разрешимости свойств полноты и А-полноты”, *Доклады академии наук,*, **367**:4 (1999), 439–441.

[8] Муравьев Н.В., “Задача определения порядка для автоматов, чьи функции переходов и выходов принадлежат замкнутому классу Поста”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **29**:3 (2025), 180–189.

Статья поступила 1 октября 2026 г.

On the order of some automata with the superposition operation..

D. N. Babin, N. V. Muravev

If the input and output alphabets of an initial automaton coincide, then the number of distinct automata obtained by superposing the original automaton with itself can be either finite or infinite. The problem of determining the order of a finite initial automaton with respect to superposition is algorithmically undecidable in the general case. However, for some classes of automata, algorithms for determining the order can be found.

Keywords: Mealy automata, Post classes, algorithmic decidability.

References

[1] Kudryavtsev V.B., Aleshin S.V., Podkolzin A.S., *Introduction to Automata Theory (in Russian)*, Nauka, Moscow, 1985.

[2] P. Gillibert., “An automaton group with undecidable order and Engel problems”, *Journal of Algebra*, **497** (2018), 363–392. DOI: 10.1016/j.jalgebra.2017.11.049.

[3] Aleshin S.V., *Algebraic systems of automata (in Russian)*, MAX PRESS, Moscow, 2016.

[4] Muravev N.V., "Bounds on Orders of Linear Automata (in Russian)", *Bulletin of Moscow University. Mathematics and Mechanics.*, 2022, №6, 8–14. DOI: 10.55959/msu0579-9368-1-2022-6-8-14.

[5] Muravev N.V., "Maximal Finite Orders of Linear Automata over an Arbitrary Field (in Russian)", *Bulletin of Moscow University. Mathematics and Mechanics.*, 2024, №5, 71–73. DOI: 10.55959/msu0579-9368-1-65-5-9.

[6] Jablonsky S.V., Gavrilov G.P., Kudryavcev V.B., *Functions of algebra logic and Post classes (in Russian)*, Nauka, Moscow, 1966.

[7] Babin D.N., "On the Classification of Automaton Bases", *Doklady Mathematics*, **60**:1 (1999), 65–67.

[8] Muravev N.V., "The order problem for automata which transition and output functions lie in closed Post classes", *Intelligent systems. Theory and applications*, **29**:3 (2025), 180–189.

Received on October 1, 2026