Аналог предполного класса Слупецкого в классе полиномов по модулю четыре

И. М. Янушкевич*

В работе исследуется замкнутый класс функций четырёхзначной логики, представимых в виде полинома по модулю 4. Показано, что любая такая функция единственным образом задаётся набором булевых функций той же арности. Главным результатом работы является описание предполного класса в классе полиномов, содержащего все функции-полиномы одной переменной и являющегося аналогом предполного класса Слупецкого.

Ключевые слова: функция многозначной логики, полином (многочлен), замкнутый класс.

1. Введение

Рассматривается класс Poly_4 всех полиномиальных функций четырёхзначной логики. Здесь функция k-значной логики называется полиномиальной, если её можно представить полиномом (многочленом) над кольцом вычетов по модулю k. Известно, что класс всех полиномиальных функций k-значной логики Poly_k совпадает с классом P_k всех функций k-значной логики тогда и только тогда, когда k — простое число [1]. Если k — составное число, то класс Poly_k является замкнутым, но не предполным (см., например, [1]).

И. Г. Розенбергом были описаны все предполные классы в P_k для любого $k \geq 3$ (см. [2]). Одним из таких классов является класс Слупецкого SL, построенный Е.Слупецким в работе [3]. Также в ряде работ изучается положение замкнутого класса Poly_k в решётке всех замкнутых классов функций k-значной логики, его свойства и решётка его подклассов [4–8]. В частности, были найдены все подклассы класса полиномов, содержащие все линейные функции [4] и [8].

В настоящей работе построена биекция между функциями, представимыми полиномами арности n и $n+2$ функциями арности n из

* *Янушкевич Иван Михайлович* — студент каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: ivan13.2002@yandex.ru, ORCID: 0009-0005-6128-9519.

Yanushkevich Ivan Mikhailovich — Student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intellectual Systems.

P_2, а также найден предполный класс в классе полиномов 4-значной логики, содержащий пересечение класса полиномов и класса Слупецкого. Насколько нам известно, это первый найденный предполный класс в классе полиномов, который содержит все полиномы одной переменной. Предикат, задающий класс Слупецкого в P_k, определяется как множество всех наборов арности k, в которых не все элементы различны [10]. Все наборы, принадлежащие предикату, задающему найденный класс, обладают тем же свойством, поэтому этот класс можно рассматривать как аналог класса Слупецкого для Poly_4.

2. Определения

Пусть $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ — множество всех натуральных чисел; $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$; $E_k = \{0, 1, 2, \dots, k-1\}$. При $n \geq 1$ определим

$$P_k^n := \{f \mid f : E_k^n \to E_k\},\ P_k := \bigcup_{n \geq 1} P_k^n.$$

Элементы P_k будем называть *функциями k-значной логики*. На множестве P_k обычным образом определим оператор замыкания $[\,]$ относительно операций суперпозиции. Множество $M \subseteq P_k$ называется замкнутым, если $[M] = M$. Замкнутое множество функций называется *клоном*, если в нём содержится тождественная функция.

Отображение $E_k^h \to \{0, 1\}$ будем называть *предикатом арности* h. Пусть

$$R_k^h := \left\{\rho \mid \rho : E_k^h \to \{0, 1\}\right\},\ R_k := \bigcup_{h \geq 0} R_k^h.$$

В работе предикаты будем изображать в виде матриц, в которых столбцам соответствуют наборы, на которых предикат принимает значение 1. Запись

$$\rho = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & \dots & b_{n1} \\ b_{12} & b_{22} & \dots & b_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1h} & b_{2h} & \dots & b_{nh} \end{pmatrix}$$

означает, что $\rho \in R_k^h$, $\rho(b_{i,1}, b_{i,2}, \ldots, b_{i,h}) = 1$ для любого $i = 1, \ldots, n$, и предикат ρ принимает значение 0 на остальных наборах. Будем писать, что $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_h \end{pmatrix} \in \rho$, если $\rho(b_1, b_2, \ldots, b_h) = 1$.

Будем говорить, что функция $f \in P_k^n$ сохраняет предикат $\rho \in R_k^h$, если

$$f \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{h1} & a_{h2} & \ldots & a_{hn} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} f(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}) \\ f(a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}) \\ \vdots \\ f(a_{h1}, a_{h2}, \ldots, a_{hn}) \end{pmatrix} \in \rho$$

для любых

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{h1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{h2} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{hn} \end{pmatrix} \in \rho.$$

Через $\mathrm{Pol}(\rho)$ обозначим множество всех функций $f \in P_k$, таких, что f сохраняет ρ. Для $S \subseteq R_k$ положим

$$\mathrm{Pol}(S) := \bigcap_{\rho \in S} \mathrm{Pol}(\rho).$$

3. Полиномы

В дальнейшем будем рассматривать только функции из P_4 и под полиномом понимать полином по модулю 4. Класс всех функций, представимых такими полиномами, обозначим через Poly_4 и назовём классом полиномов; кроме того, для каждого n положим $\mathrm{Poly}_4^n := \mathrm{Poly}_4 \cap P_4^n$.

Введём обозначение для операции взятия остатка по модулю 2: $x^\dagger := x \bmod 2$.

Следует отметить, что $\mathrm{Poly}_4 = [\{1,\ x + y,\ x \cdot y\}]$, где $x + y$ и $x \cdot y$ обозначают, соответственно, сложение и умножение по модулю 4.

Рассмотрим два предиката:

$$\rho_{T_{0\sim2,1\sim3}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\rho_{\mathrm{Poly}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 3 & 3 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & 3 & 1 & 3 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 1 & 3 & 3 & 1 & 3 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

В [5] в теореме 4 описывается предикат, задающий класс полиномов для P_{p^m}, где p — простое, $1 \leq m \leq p$. В случае $p = 2, m = 2$ полученный предикат совпадает с ρ_{Poly}. Следовательно, $\mathrm{Pol}(\rho_{\mathrm{Poly}}) = \mathrm{Poly}_4$.

В [6] в теореме 9 было доказано, что для P_k, где k — квадрат простого числа, существует единственный класс, отличный от P_k и Poly_k, содержащий класс полиномов, — класс сохранения остатка по модулю $\sqrt{k}$. В случае $k = 4$ этот класс задаётся предикатом $\rho_{T_{0\sim2,1\sim3}}$.

Также в [9] было доказано, что $|\,\mathrm{Poly}_4^n\,| = 4^{(\frac{n}{2}+1)\cdot 2^n}$, но мы предлагаем наше доказательство этого факта, так как оно напрямую связано с представлением функций-полиномов четырёхзначной логики через набор булевых функций.

Теорема 1. *Количество функций арности n, представимых полиномами в P_4, не превышает $2^{(n+2)\cdot 2^n}$.*

Доказательство. Заметим, что для любой функции-полинома f, для любых наборов $(a_1, \ldots, a_n) \in \{0, 1\}^n$ и $(b_1, \ldots, b_n) \in \{0, 1, 2, 3\}^n$, таких, что $b_i^\dagger = a_i$ для любого i, в силу сохранения предиката $\rho_{T_{0\sim2,1\sim3}}$, справедливо равенство $f(a_1, \ldots, a_n)^\dagger = f(b_1, \ldots, b_n)^\dagger$. То есть если два набора совпадают по модулю 2 покомпонентно, то значения функции-полинома на них совпадают по модулю 2.

Также заметим, что для любого набора $(b_1, \ldots, b_n) \in \{0, 1, 2, 3\}^n$ и различных $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ благодаря сохранению предиката ρ_{Poly} по значениям $c_1 = f(b_1, \ldots, b_n)$, $c_2 = f(b_1, \ldots, b_i+2, \ldots, b_n)$, а также значению $c_3 = f(b_1, \ldots, b_j + 2, \ldots, b_n)$ можно однозначно определить значение $c_4 = f(b_1, \ldots, b_i + 2, \ldots, b_j + 2, \ldots, b_n)$. Действительно, если столбец (a, b, c, d) принадлежит предикату ρ_{Poly}, то выполняется равенство $a+b+c+d = 0$. Набор (c_1, c_2, c_3, c_4) принадлежит предикату

ρ_{Poly} и по известным значениям трёх элементов можно однозначно определить значение четвёртого: $c_4 = -c_1 - c_2 - c_3$.

Следовательно, если для всех наборов $(a_1, \ldots, a_n) \in \{0,1\}^n$ известны значения $f(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n)$, $f(a_1 + 2, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n)$, $f(a_1, a_2 + 2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n), \ldots,$ $f(a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n + 2)$, то значение функции-полинома на любом наборе $(b_1, \ldots, b_n) \in \{0,1,2,3\}^n$ определяется однозначно.

Для произвольного набора $(a_1, \ldots, a_n) \in \{0,1\}^n$ значение $f(a_1, \ldots, a_n)$ можно выбрать не более 4 способами, количество таких наборов равно 2^n. Значение каждого из $f(a_1 + 2, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n)$, $f(a_1, a_2 + 2, a_3, \ldots, a_n), \ldots,$ $f(a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n + 2)$ можно выбрать не более чем двумя способами (из-за сохранения значения по модулю 2), число таких наборов равно $n \cdot 2^n$. Остальные значения определяются однозначно.

Таким образом, число способов выбрать значения полинома на всех наборах не превышает $4^{2^n} \cdot 2^{n \cdot 2^n} = 2^{(n+2) \cdot 2^n}$.

$\square$

Лемма 1. *Пусть $g \in P_2$. Тогда функция $f \in P_4$, определяемая соотношением $f(x_1, \ldots, x_n) = g(x_1^\dagger, \ldots, x_n^\dagger)$, представима полиномом.*

Доказательство. Заметим, что для любого набора $(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \rho_{\mathrm{Poly}}$ выполняется $a_1^\dagger = a_2^\dagger = a_3^\dagger = a_4^\dagger$. Следовательно, для любых наборов $(a_{11}, a_{21}, a_{31}, a_{41}), (a_{12}, a_{22}, a_{32}, a_{42}), \ldots, (a_{1n}, a_{2n}, a_{3n}, a_{4n}) \in \rho_{\mathrm{Poly}}$ справедливо равенство:

$$f\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \ldots & a_{3n} \\ a_{41} & a_{42} & \ldots & a_{4n} \end{pmatrix} = g\begin{pmatrix} a_{11}^\dagger & a_{12}^\dagger & \ldots & a_{1n}^\dagger \\ a_{21}^\dagger & a_{22}^\dagger & \ldots & a_{2n}^\dagger \\ a_{31}^\dagger & a_{32}^\dagger & \ldots & a_{3n}^\dagger \\ a_{41}^\dagger & a_{42}^\dagger & \ldots & a_{4n}^\dagger \end{pmatrix} =$$

$$= g\begin{pmatrix} a_{11}^\dagger & a_{12}^\dagger & \ldots & a_{1n}^\dagger \\ a_{11}^\dagger & a_{12}^\dagger & \ldots & a_{1n}^\dagger \\ a_{11}^\dagger & a_{12}^\dagger & \ldots & a_{1n}^\dagger \\ a_{11}^\dagger & a_{12}^\dagger & \ldots & a_{1n}^\dagger \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \subsetneq \rho_{\mathrm{Poly}}$$

Таким образом, функция f сохраняет предикат ρ_{Poly} и является полиномом.

$\square$

Заметим, что функция

$$2j_3 := \begin{cases} 2, & \text{если } x = 3, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

представима полиномом, так как $2j_3(x) = x^3 - x^2$.

Следовательно, поскольку $2j_a(x) = 2j_3(x - a + 3)$, для любого $a \in \{0, 1, 2, 3\}$ верно, что

$$2j_a(x) := \begin{cases} 2, & \text{если } x = a, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \in \mathrm{Poly}_4 .$$

Теорема 2. *Отображение, сопоставляющее каждому набору из* $n + 2$ *функций* $(g^f, g_0^f, g_1^f, \ldots, g_n^f) \in (P_2^n)^{n+2}$ *функцию-полином* $f \in \mathrm{Poly}_4^n$ *по следующей формуле:*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \\ g^f(x_1^\dagger, \ldots, x_n^\dagger) + \sum_{i=1}^{n} g_i^f(x_1^\dagger, \ldots, x_n^\dagger) \cdot 2\lfloor x_i/2 \rfloor + 2g_0^f(x_1^\dagger, \ldots, x_n^\dagger), \quad (1)$$

устанавливает взаимно-однозначное соответствие между множеством Poly_4^n *и множеством* $(P_2^n)^{n+2}$.

Доказательство. Заметим, что $2\lfloor x/2 \rfloor = 2j_2(x) + 2j_3(x)$, а значит, $2\lfloor x/2 \rfloor$ является функцией-полиномом. Кроме того, по лемме 1 для любой $g \in P_2^n$ справедливо, что $g(x_1^\dagger, \ldots, x_n^\dagger)$ является полиномом.

Следовательно, для произвольного набора $(g, g_0, g_1, \ldots, g_n) \in (P_2^n)^{n+2}$ верно, что функция

$$g(x_1^\dagger, \ldots, x_n^\dagger) + \sum_{i=1}^{n} g_i(x_1^\dagger, \ldots, x_n^\dagger) \cdot 2\lfloor x_i/2 \rfloor + 2g_0(x_1^\dagger, \ldots, x_n^\dagger)$$

является полиномом, как сумма и произведение функций-полиномов.

Докажем инъективность отображения заданного формулой 1. Пусть два набора булевых функций $(g, g_0, g_1, \ldots, g_n)$ и $(g', g_0', g_1', \ldots, g_n')$ задают одну и ту же функцию f.

Для любого набора $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \{0, 1\}^n$ имеем $f(\alpha) = g(\alpha) + 2g_0(\alpha) = g'(\alpha) + 2g_0'(\alpha)$, следовательно $g(\alpha) = g'(\alpha)$ и $g_0(\alpha) = g_0'(\alpha)$.

Также для любого $i \in \{1, \ldots, n\} : f(\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_n) = g(\alpha) + 2g_0(\alpha) + 2g_i(\alpha) = g'(\alpha) + 2g'_0(\alpha) + 2g'_i(\alpha)$. С учётом $g(\alpha) = g'(\alpha)$ и $g_0(\alpha) = g'_0(\alpha)$ получаем $g_i(\alpha) = g'_i(\alpha)$.

Следовательно, эти два набора функций совпадают покомпонентно и отображение инъективно.

Известно, что $|P_2^n| = 2^{2^n}$, поэтому выбрать $n+2$ функции можно $2^{(n+2)\cdot 2^n}$ способами. Отсюда следует, что функций-полиномов арности n не менее $2^{(n+2)\cdot 2^n}$. Учитывая оценку из теоремы 1 получаем, что $|\operatorname{Poly}_4^n| = 2^{(n+2)\cdot 2^n}$.

Так как построенное отображение $(P_2^n)^{n+2} \to \operatorname{Poly}_4^n$ является инъекцией между равномощными множествами, то оно является биекцией.

$\square$

4. Новый класс

В этом разделе для каждой функции-полинома f также рассматривается её представление с помощью функций $g^f, g_0^f, g_1^f, \ldots, g_n^f$ согласно теореме 2.

Определение 1. Будем говорить, что **у функции f существует блок 0/2**, если найдутся набор $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \{0,1\}^n$ и индекс $i \in \{1, \ldots, n\}$, для которых $g^f(\alpha) = 0$ и $g_i^f(\alpha) = 1$. То есть, $f(\alpha) \in \{0, 2\}$ и

$$f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n) \neq f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_i + 2, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n).$$

Эквивалентно, существуют два набора $(a_1, \ldots, a_n)$, $(b_1, \ldots, b_n) \in \{0,1,2,3\}^n$, такие, что для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$ верно $a_i^\dagger = b_i^\dagger$ и $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$, $f(b_1, \ldots, b_n) = 2$.

Определение 2. Будем говорить, что **у функции f существует блок 1/3**, если найдутся набор $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \{0,1\}^n$ и индекс $i \in \{1, \ldots, n\}$, для которых $g^f(\alpha) = 1$ и $g_i^f(\alpha) = 1$. То есть $f(\alpha) \in \{1, 3\}$ и

$$f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n) \neq f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_i + 2, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n).$$

Эквивалентно, существуют два набора $(a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_n) \in \{0,1,2,3\}^n$, такие, что для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$ верно $a_i^\dagger = b_i^\dagger$ и $f(a_1, \ldots, a_n) = 1, f(b_1, \ldots, b_n) = 3$.

Зададим следующие множества функций:

Множество I содержит функции-полиномы, у которых не существует блока $0/2$, а также функции-полиномы, у которых не существует блока $1/3$.

Для $n \geq 1$ определим K^n как множество функций-полиномов f арности n со следующим свойством: существует такой $i \in \{1, \ldots, n\}$ (назовём i-ую переменную **выделенной**), что

- Для любых ненулевых $j \neq i$ верно $g_j^f \equiv 0$;
- Существуют константы $a_0, a_1 \in \{0, 1\}$ такие, что для любого набора
  $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, k, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n) \in \{0, 1\}^n$, если
  $g_i^f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, k, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n) = 1$, то
  $g^f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, k, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n) = a_k$.

Определим множество K следующим образом: $\mathrm{K} := \bigcup_{n \geq 1} \mathrm{K}^n$.

Кроме того, рассмотрим следующий предикат:

$\rho = \{(a, b, c, d) \mid a, b, c, d \in \{0, 1, 2, 3\},\ a^\dagger = b^\dagger,\ c^\dagger = d^\dagger,$ $\{a, b, c, d\} \neq \{0, 1, 2, 3\}\}$

Лемма 2. *Все функции множества* I *содержатся в* $\mathrm{Pol}(\rho)$.

Доказательство. Рассмотрим функцию f из I и наборы

$$(a_{11}, a_{21}, a_{31}, a_{41}), (a_{12}, a_{22}, a_{32}, a_{42}), \ldots, (a_{1n}, a_{2n}, a_{3n}, a_{4n}) \in \rho.$$

Обозначим

$$c_1 := f(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}),\ c_2 := f(a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}),$$
$$c_3 := f(a_{31}, a_{32}, \ldots, a_{3n}),\ c_4 := f(a_{41}, a_{42}, \ldots, a_{4n}).$$

Отметим, что из определения предиката ρ для любого i выполнено $a_{1i}^\dagger = a_{2i}^\dagger$ и $a_{3i}^\dagger = a_{4i}^\dagger$. И если $c_1 = c_2 + 2$, то у функции f будет блок $0/2$ или $1/3$, аналогично с $c_3 = c_4 + 2$.

Поскольку f является функцией-полиномом и сохраняет предикат $\rho_{T_{0\sim 2, 1\sim 3}}$, верно, что $c_1^\dagger = c_2^\dagger$ и $c_3^\dagger = c_4^\dagger$. Если $c_1 \neq c_2$, $c_3 \neq c_4$ и $c_1^\dagger \neq c_3^\dagger$, то у функции f по определению существует блок $0/2$ и $1/3$, действительно, в этом случае одна из пар (c_1, c_2) или (c_3, c_4) образует пару $\{0, 2\}$, а другая — $\{1, 3\}$. Наличие одновременно блока $0/2$ и блока $1/3$ противоречит тому, что функция принадлежит множеству I. Значит, $c_1 = c_2$ или $c_3 = c_4$, или $c_1^\dagger = c_2^\dagger = c_3^\dagger = c_4^\dagger$, то есть $\{c_1, c_2, c_3, c_4\} \neq \{0, 1, 2, 3\}$ и набор (c_1, c_2, c_3, c_4) принадлежит предикату ρ.

Следовательно, функция f сохраняет предикат ρ.

□

Лемма 3. *Все функции множества* K *содержатся в* Pol(ρ).

Доказательство. Рассмотрим функцию f из K. Без ограничения общности считаем, что выделенной является первая переменная. Рассмотрим наборы

$$(a_{11}, a_{21}, a_{31}, a_{41}), (a_{12}, a_{22}, a_{32}, a_{42}), \ldots, (a_{1n}, a_{2n}, a_{3n}, a_{4n}) \in \rho,$$

и обозначим

$$c_1 := f(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}),\ c_2 := f(a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}),$$
$$c_3 := f(a_{31}, a_{32}, \ldots, a_{3n}),\ c_4 := f(a_{41}, a_{42}, \ldots, a_{4n}).$$

Заметим, что $c_1^\dagger = c_2^\dagger$, $c_3^\dagger = c_4^\dagger$, так как f является функцией-полиномом и сохраняет предикат $\rho_{T_{0\sim 2,1\sim 3}}$.

Рассмотрим набор $(a_1, \ldots, a_n) \in \{0, 1\}^n$ такой, что $a_i = a_{1i}^\dagger = a_{2i}^\dagger$ и набор $(a'_1, \ldots, a'_n) \in \{0, 1\}^n$ такой, что $a'_i = a_{3i}^\dagger = a_{4i}^\dagger$.

Поскольку для любых ненулевых j, отличных от 1, выполнено $g_j^f \equiv 0$, то из следующей цепочки равенств

$$f(a_{11}, \ldots, a_{1n}) = g^f(a_1, \ldots, a_n) + \sum_{i=1}^{n} g_i^f(a_1, \ldots, a_n) \cdot 2\lfloor a_{1i}/2 \rfloor +$$
$$2g_0^f(a_1, \ldots, a_n) = g^f(a_1, \ldots, a_n) + g_1^f(a_1, \ldots, a_n) \cdot 2\lfloor a_{11}/2 \rfloor +$$
$$2g_0^f(a_1, \ldots, a_n) = f(a_{11}, a_2, a_3, \ldots, a_n)$$

получаем $c_1 = f(a_{11}, \ldots, a_{1n}) = f(a_{11}, a_2, a_3, \ldots, a_n)$. Аналогично выводятся следующие равенства:

$$c_2 = f(a_{21}, \ldots, a_{2n}) = f(a_{21}, a_2, a_3, \ldots, a_n),$$
$$c_3 = f(a_{31}, \ldots, a_{3n}) = f(a_{31}, a'_2, a'_3, \ldots, a'_n),$$
$$c_4 = f(a_{41}, \ldots, a_{4n}) = f(a_{41}, a'_2, a'_3, \ldots, a'_n).$$

Так как $(a_{11}, a_{21}, a_{31}, a_{41})$ принадлежит предикату ρ, то или $a_{11} = a_{21}$, или $a_{31} = a_{41}$, или $a_1 = a'_1$.

Значит, выполнится или $c_1 = c_2$, или $c_3 = c_4$, или, так как функция f принадлежит множеству K, $c_1^\dagger = c_2^\dagger = c_3^\dagger = c_4^\dagger = g^f(a_1, \ldots, a_n)$.

Во всех указанных случаях $\{c_1, c_2, c_3, c_4\} \neq \{0, 1, 2, 3\}$ и набор (c_1, c_2, c_3, c_4) принадлежит предикату ρ. Следовательно, функция f сохраняет предикат ρ. $\square$

Лемма 4. $(\mathrm{Pol}(\rho) \cap \mathrm{Poly}_4) \subseteq \mathrm{K} \cup \mathrm{I}$.

Доказательство. Рассмотрим $f \in \mathrm{Pol}(\rho) \cap \mathrm{Poly}_4$. Если у f не существует блока $0/2$ или блока $1/3$, то $f \in \mathrm{I}$, поэтому далее мы считаем, что у f существует и блок $0/2$, и блок $1/3$. То есть существуют наборы $(a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_n) \in \{0, 1\}^n$ и $t, s \in \{1, \ldots, n\}$, что

$$g^f(a_1, \ldots, a_n) = 0, \;\; g^f(b_1, \ldots, b_n) = 1,$$

$$g^f_s(a_1, \ldots, a_n) = 1, \;\; g^f_t(b_1, \ldots, b_n) = 1.$$

При этом $t = s$, так как иначе f не сохраняет предикат ρ:

$$f\begin{pmatrix} a_1 & \ldots & a_s & \ldots & a_t & \ldots & a_n \\ a_1 & \ldots & a_s + 2 & \ldots & a_t & \ldots & a_n \\ b_1 & \ldots & b_s & \ldots & b_t & \ldots & b_n \\ b_1 & \ldots & b_s & \ldots & b_t + 2 & \ldots & b_n \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Без ограничения общности $t = s = 1$, и, следовательно, для всех $j > 1$ для любого набора $(c_1, \ldots, c_n) \in \{0, 1\}^n$ выполняется $g^f_j(c_1, \ldots, c_n) = 0$.

Также рассмотрим наборы $(d_2, \ldots, d_n), (e_2, \ldots, e_n) \in \{0, 1\}^{n-1}$, такие что $g^f_1(0, d_2, \ldots, d_n) = g^f_1(0, e_2, \ldots, e_n) = 1$. Тогда из сохранения предиката ρ следует:

$$f\begin{pmatrix} 0 & d_2 & \ldots & d_n \\ 2 & d_2 & \ldots & d_n \\ 0 & e_2 & \ldots & e_n \\ 2 & e_2 & \ldots & e_n \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 3 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 3 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

То есть $g^f(0, d_2, \ldots, d_n) = f(0, d_2, \ldots, d_n)^\dagger = f(0, e_2, \ldots, e_n)^\dagger = g^f(0, e_2, \ldots, e_n)$. Аналогично для наборов, начинающихся с 1. То есть существуют константы $a_0, a_1 \in \{0, 1\}$ такие, что для любого набора $(k, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \{0, 1\}^n$, если $g^f_1(k, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = 1$, то $g^f(k, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = a_k$. Следовательно, $f \in \mathrm{K}$, что и требовалось доказать.

$\square$

Из доказанных выше лемм выводится следующая теорема:

Теорема 3. $\mathrm{Pol}(\rho) \cap \mathrm{Poly}_4 = \mathrm{I} \cup \mathrm{K}$.

Теорема 4. $SL \cap \mathrm{Poly}_4 \subsetneq \mathrm{Pol}(\rho) \cap \mathrm{Poly}_4$.

Доказательство. Класс Слупецкого SL состоит из двух типов функций: функций, существенно зависящих не более, чем от одной переменной и функций, принимающих не все значения.

Пусть функция-полином f существенно зависит не более, чем от одной переменной (без ограничения общности, если зависит, то от первой). Рассмотрим набор $(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \rho$ и обозначим $c_1 = f(a_1, \dots)$, $c_2 = f(a_2, \dots)$, $c_3 = f(a_3, \dots)$, $c_4 = f(a_4, \dots)$.

Заметим, что $c_1^\dagger = c_2^\dagger$, так как $a_1^\dagger = a_2^\dagger$ и $f \in \mathrm{Pol}(\rho_{T_{0\sim 2,1\sim 3}})$. Аналогично, $c_3^\dagger = c_4^\dagger$, поскольку $a_3^\dagger = a_4^\dagger$ и $f \in \mathrm{Pol}(\rho_{T_{0\sim 2,1\sim 3}})$. Кроме того, $\{c_1, c_2, c_3, c_4\} \neq \{0, 1, 2, 3\}$, так как $\{a_1, a_2, a_3, a_4\} \neq \{0, 1, 2, 3\}$ и функция f отображает одинаковые значения в одинаковые. Следовательно, $(c_1, c_2, c_3, c_4) \in \rho$, и $f \in \mathrm{Pol}(\rho)$.

Если функция f принимает не все значения, то из определения существования блоков $0/2$ и $1/3$ у неё либо не существует блока $0/2$, либо не существует блока $1/3$.

В качестве примера функции из $(\mathrm{Pol}(\rho) \cap \mathrm{Poly}_4) \backslash (SL \cap \mathrm{Poly}_4)$ можно взять $h(x_1, x_2) := x_1^\dagger + 2x_2^\dagger$. Это полином, для которого $g^h(x_1, x_2) = x_1, g_0^h(x_1, x_2) = x_2, g_1^h = g_2^h \equiv 0$, принимающий все 4 значения, но у него не существует ни блока $0/2$, ни блока $1/3$.

$\square$

Теорема 5. *Класс* $\mathrm{Pol}(\rho) \cap \mathrm{Poly}_4$ *предполон в* Poly_4.

Доказательство. Рассмотрим функцию $f \in \mathrm{Poly}_4 \setminus \mathrm{Pol}(\rho)$. Так как f не сохраняет предикат ρ, существуют наборы $(a_{11}, a_{21}, a_{31}, a_{41})$, $(a_{12}, a_{22}, a_{32}, a_{42}), \dots, (a_{1n}, a_{2n}, a_{3n}, a_{4n}) \in \rho$, такие, что набор (c_1, c_2, c_3, c_4), определённый равенствами

$$c_1 = f(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}),\ c_2 = f(a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}),$$
$$c_3 = f(a_{31}, a_{32}, \dots, a_{3n}),\ c_4 = f(a_{41}, a_{42}, \dots, a_{4n}).$$

не принадлежит предикату ρ.

Заметим, что $c_1^\dagger = c_2^\dagger$, $c_3^\dagger = c_4^\dagger$, так как f является функцией-полиномом и, следовательно, сохраняет предикат $\rho_{T_{0\sim 2,1\sim 3}}$. Тогда $\{c_1, c_2, c_3, c_4\} = \{0, 1, 2, 3\}$ (иначе столбец принадлежал бы предикату ρ).

Далее, для любого набора $(a, b) \in \{0, 1, 2, 3\}^2$ определим две функции $q_{b\star a}$ и $q_{ab\star}$ следующим образом:

$$q_{b\star a}(x, y) := \begin{cases} b, \text{ если } (x, y) \in \{(0, 0), (0, 2)\}, \\ b + 2, \text{ если } (x, y) \in \{(2, 0), (2, 2)\}, \\ a, \text{ иначе} \end{cases}$$

$$q_{ab\star}(x, y) := \begin{cases} b, \text{ если } (x, y) \in \{(0, 1), (0, 3)\}, \\ b + 2, \text{ если } (x, y) \in \{(2, 1), (2, 3)\}, \\ a, \text{ иначе} \end{cases}$$

Несложно проверить, что эти функции сохраняют предикат ρ_{Poly} и, следовательно, представляются полиномами. Поскольку все эти функции представляют собой функции-полиномы, принимающие не более трёх значений, они принадлежат классу $\mathrm{Poly}_4 \cap SL$, а следовательно, и классу $\mathrm{Pol}(\rho)$.

Кроме того, для любых $a, b \in \{0, 1, 2, 3\}$ функции $q_{b\star a}$ и $q_{ab\star}$ обладают следующим свойством:

$$q_{ab\star}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ b \\ b+2 \end{pmatrix}, \quad q_{b\star a}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ b+2 \\ a \\ a \end{pmatrix}.$$

Теперь построим набор функций-полиномов h_i по следующим правилам:

1. Если $a_{1i} = a_{2i}$, $a_{3i} \neq a_{4i}$, то $h_i(x, y) = q_{a_{1i}a_{3i}\star}(x, y)$.
2. Если $a_{1i} \neq a_{2i}$, $a_{3i} = a_{4i}$, то $h_i(x, y) = q_{a_{1i}\star a_{3i}}(x, y)$.
3. Если $a_{1i} \neq a_{2i}$, $a_{3i} \neq a_{4i}$, $a_{1i} = a_{3i}$, то $h_i(x, y) = x + a_{1i}$.
4. Если $a_{1i} \neq a_{2i}$, $a_{3i} \neq a_{4i}$, $a_{1i} \neq a_{3i}$, то $h_i(x, y) = 2j_2(x) + 2j_1(y) + a_{1i}$.
5. Если $a_{1i} = a_{2i}$, $a_{3i} = a_{4i}$, то $h_i(x, y) = (a_{3i} - a_{1i}) \cdot y + a_{1i}$.

Заметим, что все функции h_i принадлежат классу $\mathrm{Pol}(\rho)$, так как или принимают не все значения, или существенно зависят от одной переменной. Теперь рассмотрим функцию $f'(x, y) :=$

$f(h_1(x,y),\dots,h_n(x,y))$. Данная функция обладает следующим свойством:

$$f'\begin{pmatrix}0&0\\2&0\\0&1\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\\c_4\end{pmatrix}.$$

При этом все c_i принимают разные значения и $c_1+2=c_2$, $c_3+2=c_4$. Рассмотрим функцию $f''(x,y):=(c_3-c_1)(f'(x,y)-c_1)$. Она обладает следующим свойством:

$$f''\begin{pmatrix}0&0\\2&0\\0&1\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\\1\\3\end{pmatrix}.$$

Рассмотрим ещё две функции-полинома из класса $\mathrm{Pol}(\rho)$: $s(x,y)=x^2+2xy+y^2$ (принимает только значения 0 и 1) и $g(x,y)=x^2+2xy+y^2+3x+3y$ (принимает только значения 0 и 2).

Заметим, что $x+y=f''(g(x,y),s(x,y))$. Из суммы следующим образом можно получить разность:

$$x-y=x+y+y+y.$$

С помощью суммы, разности и возведения в куб (это функция арности 1), получим функцию

$$3x^2y+3xy^2=(x+y)^3-x^3-y^3.$$

Отметим, что $x^2y^2\in\mathrm{Pol}(\rho)$, так как она принимает только значения 0 и 1. Также из формулы

$$(x^2-x)(y^2-y)=0$$

следующим образом можно выразить умножение:

$$xy=-(x^2y+xy^2+x^2y^2)=3x^2y+3xy^2-x^2y^2.$$

Следовательно, с помощью произвольной функции-полинома $f\in\mathrm{Poly}_4\setminus\mathrm{Pol}(\rho)$ и функций из $\mathrm{Pol}(\rho)$ можно получить функции $x+y$ и xy. Константы уже принадлежат $\mathrm{Pol}(\rho)$, а $[\{1,x+y,xy\}]=\mathrm{Poly}_4$, предполнота доказана.

$\square$

Список литературы

[1] Яблонский С. В., “Функциональные построения в k-значной логике”, *Труды Математического института им. В. А. Стеклова*, **51** (1958), 5–142.

[2] Розенберг И. Г., “Описание предполных классов в P_k”, *Rozpravy Československé Akademie Věd, Série Math. Přír. Věd.*, **80** (1970), 3–93.

[3] Слупецкий Е., “Полное трёхзначное исчисление высказываний”, *Comptes Rendus des Séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie, Classe III*, **29** (1936), 9–11.

[4] Крохин А. А., Сафин К. Л., Суханов Е. В., “О строении решётки замкнутых классов полиномов”, *Дискретная математика*, **9**:2 (1997), 24–39. DOI: `10.4213/dm469`.

[5] Селезнёва С. Н., “Описание замкнутого класса полиномиальных функций по модулю степени простого числа посредством отношения”, *Дискретная математика*, **35**:4 (2023), 115–125. DOI: `10.4213/dm1803`.

[6] Мещанинов Д. Г., “О некоторых свойствах надструктуры класса полиномов в P_k”, *Математические заметки*, **44**:5 (1988), 673–681.

[7] Ploščica M., Varga I., “Clones of compatible operations on rings $\mathbb{Z}_{p^k}$”, *Journal of Multiple-Valued Logic and Soft Computing*, **36**:4–5 (2021), 391–404.

[8] Мещанинов Д. Г., “Замкнутые классы полиномов по модулю p^2”, *Дискретная математика*, **29**:3 (2017), 54–69. DOI: `10.4213/dm1452`.

[9] Селезнёва С. Н., “О числе полиномиальных функций k-значной логики по составному модулю k”, *Дискретная математика*, **28**:2 (2016), 81–91. DOI: `10.4213/dm1371`.

[10] Марченков С. С., “Предполнота замкнутых классов в P_k: предикатный подход”, *Математические вопросы кибернетики*, 1996, № 6, 117–132 .

Статья поступила 30 марта 2026 г.

An analogue of the Slupecki maximal clone within the clone of polynomials modulo four

I. M. Yanushkevich

We study the clone of all functions on four elements that can be represented as polynomials modulo 4. We show that any such function is uniquely determined by a set of Boolean functions of the same arity. The main result of the paper is a description of a maximal clone within the clone of polynomial functions that contains all unary polynomials, and which is analogous to the Słupecky maximal clone.

Keywords: multivalued logic function, polynomial, closed class.

References

[1] Yablonskii S. V., “Functional constructions in k-valued logic”, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, **51** (1958), 5–142 (In Russian).

[2] Rosenberg I. G., “Description of precomplete classes in P_k”, *Rozpravy Československé Akademie Věd, Série Math. Přír. Věd.*, **80** (1970), 3–93 (In Russian).

[3] Słupecki J., “The full three-valued propositional calculus”, *Comptes Rendus des Séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie, Classe III*, **29** (1936), 9–11 (In German).

[4] Krokhin A. A., Safin K. L., Sukhanov E. V., “On the structure of the lattice of closed classes of polynomials”, *Discrete Mathematics and Applications*, **7**:2 (1997), 131–146. DOI: 10.1515/dma.1997.7.2.131.

[5] Selezneva S. N., “Describing the closed class of polynomial functions modulo a power of a prime number by a relation”, *Discrete Mathematics and Applications*, **35**:2 (2025), 125–133. DOI: 10.1515/dma-2025-0008.

[6] Meshchaninov D. G., “Superstructures of the class of polynomials in P_k”, *Mathematical Notes of the Academy of Sciences of the USSR*, **44** (1988), 850–854. DOI: 10.1007/BF01158427.

[7] Ploščica M., Varga I., “Clones of compatible operations on rings $\mathbb{Z}_{p^k}$”, *Journal of Multiple-Valued Logic and Soft Computing*, **36**:4–5 (2021), 391–404.

[8] Meshchaninov D. G., “Closed classes of polynomials modulo p^2”, *Discrete Mathematics and Applications*, **28**:3 (2018), 167–178. DOI: 10.1515/dma-2018-0016.

[9] Selezneva S. N., “On the number of functions of k-valued logic which are polynomials modulo composite k”, *Discrete Mathematics and Applications*, **27**:1 (2017), 7–14. DOI: 10.1515/dma-2017-0002.

[10] Marchenkov S. S., “Precompleteness of closed classes in P_k: predicate approach”, *Mathematical Questions of Cybernetics*, 1996, № 6, 117–132 (In Russian).

Received on March 30, 2026