О K-порождаемости предполных классов линейных автоматов

В. А. Бирюкова*

Исследуется задача K-конечной порождаемости для предполных классов линейных автоматов над полем E_2. Доказано, что не входящие в A-критериальную систему классы не являются K-конечнопорожденными. При этом была найдена счётная серия K-замкнутых K-конечнопорожденных классов. Также показано, что любой K-предполный класс, который не является K-конечнопорожденным, будет A-полным.

Ключевые слова: конечный автомат, линейный автомат, замкнутый класс, предполный класс, операции композиции, аппроксимационное замыкание, K-конечнопорожденность, базисы замкнутых классов.

1. Введение

Рассмотрим класс конечных автоматов $P_{\text{О.-Д.}}$ с одним выходом. Для произвольного множества автоматов M обозначим через $K(M)$ его замыкание относительно операций композиции (K-замыкание): переименования входов, отождествления входов, подстановки и обратной связи [1]. Множество M будем называть K-замкнутым, если $K(M) = M$. Если $K(M) = P_{\text{О.-Д.}}$, то M есть K-полное множество. Максимальное собственное K-замкнутое подмножество $P_{\text{О.-Д.}}$ называется K-предполным классом.

Кольцо всех степенных рядов от ξ над полем $E_2 = \{0, 1\}$ обозначим как $R_2(\xi)$. Его подкольцо $E_2'(\xi)$ составляют ряды с периодической (с возможным предпериодом) последовательностью коэффициентов. Доказано [2], что элементы $E_2'(\xi)$ можно представить в виде дробей многочленов от ξ над E_2, знаменатели которых не делятся на ξ.

Класс $P_{\text{О.-Д.}}$ содержит в себе нетривиальный подкласс линейных автоматов L_2 [2]. Линейный автомат $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, имеющий n входов,

**Бирюкова Вероника Андреевна* — аспирант кафедры Математической теории интеллектуальных систем (МаТИС), механико-математического факультета МГУ, e-mail: `biryukovaveronika@mail.ru`, ORCID: 0009-0006-7590-9800.

Biryukova Veronika Andreevna — PhD student at the Chair of Mathematical Theory of Intelligent Systems (MaTIS), Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

задаётся передаточными функциями μ_i, $\mu_i \in E_2'(\xi)$, $i = \overline{1, n}$, а также свободным членом $\mu_0 \in E_2'(\xi)$. Такой автомат ставит в соответствие каждому набору $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ рядов из $R_2(\xi)$ ряд следующего вида [2]:

$$f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \alpha_i + \mu_0 \tag{1}$$

Через $U(f)$ обозначим совокупность передаточных функций, ассоциированных с заданным линейным автоматом f. А через $U(\{f_1, \ldots f_p\}) = \bigcup_{i=1}^{p} U(f_i)$ — множество всех передаточных функций, ассоциированных хотя бы с одним автоматом из $\{f_1, \ldots f_p\}$. Свободный член (свободный ход) автомата f будем обозначать $C(f)$.

Для ряда $\alpha \in R_2(\xi)$ $\alpha(t)$ есть коэффициент при ξ^t. Если передаточная функция μ входа автомата такая, что $\mu(0) = 1$, то такой вход называется непосредственным.

Вход линейного автомата является существенным, если его передаточная функция $\mu \neq 0$. Линейный автомат без существенных переменных назовём константой.

Нетрудно видеть [3], что операции композиции задают на множестве коэффициентов μ_i переменных $x_i, i = \overline{1, n}$, линейного автомата $f(x_1, \ldots, x_n)$ следующие операции:

1. Сложение элементов μ и $\tilde{\mu}$: $\mu + \tilde{\mu}$.

2. Умножение элементов μ, $\tilde{\mu}$: $\mu \cdot \tilde{\mu}$.

3. Обратная связь, применённая к элементам μ и $\tilde{\mu}$ (при этом $\tilde{\mu}(0)$ должен равняться нулю): $Fb(\mu, \tilde{\mu}) = \dfrac{\mu}{1 + \tilde{\mu}}$.

Рассматривая $E_2'(\xi)$ как множество одноместных линейных автоматов, сохраняющих нулевую последовательность, к которым можно применять описанные выше операции, введём на нём оператор $K^{(1)}$-замыкания. Аналогично K-замыканию, для $K^{(1)}$-замыкания определяются понятия $K^{(1)}$-замкнутого класса, $K^{(1)}$-полного множества, $K^{(1)}$-предполного класса, $K^{(1)}$-конечнопорожденного класса.

Далее пронумеруем неприводимые многочлены над E_2:

$p_1 = \xi,\ p_2 = 1 + \xi,\ p_3 = 1 + \xi + \xi^2, \ldots$

И рассмотрим некоторые подмножества $E_2'(\xi)$:

$R_0^{(1)} = \left\{\mu \mid \mu \in E_2'(\xi),\ \mu = \frac{u}{v},\ u, v \in E_2[\xi],\ (u, v) = 1, \deg\ u < \deg\ v\right\}$,

$R_i^{(1)} = \left\{\mu \mid \mu \in E_2'(\xi),\ \mu = \frac{u}{v},\ u, v \in E_2[\xi],\ (u, v) = 1,\ u \;\vdots\; p_i\right\},\ i \in \mathbb{N}$,

$M_0^{(1)} = \left\{\mu \mid \mu \in E_2'(\xi),\ \mu + \mu(0) = \dfrac{u'}{v'},\ \deg\ u' < \deg\ v'\right\}$,

$M_i^{(1)} = \{\mu \mid \mu \in E_2'(\xi),\ \mu + \mu(0) = \xi \cdot p_i \cdot \mu',\ \mu' = \dfrac{u'}{v'} \in E_2'(\xi),\ (v', p_i) = 1\},\ i \in \mathbb{N}$.

В статье [4] доказано, что $\mathcal{J}_2^{(1)} = \{M_i^{(1)}, R_i^{(1)} \mid i \in \mathbb{Z}_+\}$ — множество всех $K^{(1)}$-предполных классов в $E_2'(\xi)$, которое также является $K^{(1)}$-критериальной системой в $E_2'(\xi)$.

Определим следующие подмножества автоматов в L_2:
$T_0 = \{f \mid f \in L_2,\ \mu_0(0) = 0\}$,
$T_1 = \{f \mid f \in L_2,\ \sum\limits_{i=0}^{n} \mu_i(0) = 1\}$,
$V_0 = \{f \mid f \in L_2,\ f$ имеет нечётное число непосредственных переменных$\}$,
$V_1 = \{f \mid f \in L_2,\ f$ имеет не более 1 непосредственной переменной$\}$,
$M_i = \{f \mid f \in L_2, \forall\, \mu \in U(f), \mu \in M_i^{(1)}\},\ i \in \mathbb{Z}_+$,

$\tilde{M}_i = \{f \mid f \in L_2 : f(x_1, \ldots, x_n) = \sum\limits_{j=1}^{n} \mu_j x_j,\ \mu_j \in M_i^{(1)},\ j = \overline{1, n}\} \subset M_i,\ i \in \mathbb{N} \backslash \{1\}$,

$R_0^e = \{f \mid f \in L_2,\ \forall\, i \in \{1, \ldots, n\},$ если x_i — единственная существенная переменная $f,\ \mu_i = \frac{u_i}{v_i},$ то $\deg\ u_i \leqslant \deg\ v_i,$ иначе $\mu_i \in R_0^{(1)}\}$,

$R_0^d = \{f \mid f \in L_2,\ \forall\, i \in \{1, \ldots, n\},$ если x_i — единственная непосредственная переменная $f,\ \mu_i = \frac{u_i}{v_i},$ то $\deg\ u_i \leqslant \deg\ v_i,$ иначе $\mu_i \in R_0^{(1)}\}$,

$R_j^e = \{f \mid f \in L_2,\ \forall\, i \in \{1, \ldots, n\},$ если x_i — единственная существенная переменная $f,\ \mu_i = \frac{u_i}{v_i},$ то $v_i \not\vdots\, p_j,$ иначе $\mu_i \in R_j^{(1)}\}\ j \in \mathbb{N} \backslash \{1\}$,

$R_j^d = \{f \mid f \in L_2,\ \forall\, i \in \{1, \ldots, n\},$ если x_i — единственная непосредственная переменная $f,\ \mu_i = \frac{u_i}{v_i},$ то $v_i \not\vdots\, p_j,$ иначе $\mu_i \in R_j^{(1)}\}\ j \in \mathbb{N} \backslash \{1\}$.

Как показано в работе [4], $\mathcal{J}_2 = \{T_0, T_1, V_0, V_1, M_i, R_j^e, R_j^d \mid i \in \mathbb{Z}_+,\ j \in \mathbb{Z}_+ \backslash \{1\}\}$ есть множество всех K-предполных в L_2 классов, также это множество составляет K-критериальную систему L_2. А в [3] доказано, что все классы, принадлежащие критериальной системе относительно -замыкания [5] $\mathcal{J}_A = \{T_0, T_1, V_0, V_1, M_1\}$ являются K-конечнопорожденными классами.

В данной статье доказывается несколько вспомогательных утверждений, K-конечнопорожденность K-замкнутых классов $\tilde{M}_i$, а также факт, что классы $M_i,\ i \in \mathbb{Z}_+ \backslash \{1\},\ R_j^e, R_j^d,\ j \in \mathbb{Z}_+ \backslash \{1\}$ не являются K-конечнопорожденными.

2. Вспомогательные утверждения

Лемма 1. *Пусть $M = \{f_1, \ldots, f_p\} \subset L_2$ и каждый автомат из M сохраняет последовательность $C = c_0c_1 \ldots c_m$, $c_i \in E_2$, $i = \overline{0,m}$, $m \in \mathbb{Z}_+$. Тогда любой автомат из K-замыкания $K(M)$ также сохраняет C.*

Доказательство. По условию каждый автомат из M сохраняет C. Продолжим C до формального степенного ряда

$$\widetilde{C} = \sum_{s=0}^{m} c_s\xi^s + \sum_{s=m+1}^{\infty} d_s\xi^s \in R_2(\xi),$$

где d_s — произвольные коэффициенты (они не влияют на рассуждение, так как нас интересуют только первые $m+1$ членов).

Из представления (1) следует, что сохранение C автоматом означает: при подаче на его входы ряда $\widetilde{C}$ выходной ряд совпадает с $\widetilde{C}$ на первых $m+1$ членах.

Проверим, что каждая операция композиции сохраняет это свойство.

Переименование переменных не влияет на значение выхода автомата. При отождествлении переменных, если на все входы подана одна последовательность C, выходы исходного и преобразованного автоматов совпадают. Следовательно, полученный автомат также сохраняет C.

Без ограничения общности подставим f_i в n-й вход f_j. Поскольку f_i сохраняет C, на все входы f_j поступает последовательность C. Автомат f_j также сохраняет C, поэтому выход результирующего автомата на первых $m+1$ членах совпадает с C.

Пусть в автомате $f_j \in M$ применена обратная связь по переменной x_n. Тогда $\mu_n(0) = 0$ и справедливо, что:

$$f_j(\widetilde{C}, \ldots, \widetilde{C}) = \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i\widetilde{C} + \mu_n\widetilde{C} + \mu_0 = \hat{C},$$

где $\hat{C}$ — формальный степенной ряд, у которого первые $(m+1)$ коэффициентов совпадают с последовательностью C.

Также верно:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \mu_i\widetilde{C} + \mu_0 = \hat{C} + \mu_n\widetilde{C}.$$

По определению обратной связи [4]:

$$Fb_{x_n}(f_j) = \frac{1}{1+\mu_n}\left(\sum_{i=1}^{n-1} \mu_i x_i + \mu_0\right).$$

При подстановке в этот автомат на все входы $\widetilde{C}$ получаем:

$$\frac{1}{1+\mu_n}\left(\sum_{i=1}^{n-1}\mu_i\widetilde{C}+\mu_0\right)=\frac{1}{1+\mu_n}\left(\hat{C}+\mu_n\widetilde{C}\right). \tag{2}$$

Поскольку $\widetilde{C}$ и $\hat{C}$ совпадают на первых $(m+1)$ членах, на этих членах ряд $\hat{C}+\mu_n\widetilde{C}$ совпадает с $\widetilde{C}(1+\mu_n)$. Тогда, умножая на $\frac{1}{1+\mu_n}$, получаем, что ряд (2) на первых $(m+1)$ членах также совпадает с $\widetilde{C}$, то есть с последовательностью C. Следовательно, полученный в результате применения операции обратной связи автомат также сохраняет C.

Таким образом, в K-замыкании множества M все автоматы сохраняют последовательность C. □

Лемма 2. *Пусть p_i, $i\in\mathbb{N}$, — неприводимый многочлен над E_2, а $v\in E_2[\xi]$: $v(0)=1$, $v \not\vdots\, p_i$. Тогда существует многочлен $\bar{u}\in E_2[\xi]$ такой, что $(1+\xi\cdot p_i\cdot\bar{u}) \vdots\, v$, то есть $1+\xi\cdot p_i\cdot\bar{u}=v\cdot\tilde{u}$ для некоторого $\tilde{u}\in E_2[\xi]$.*

Доказательство. Рассмотрим остатки r_T от деления $(\xi\cdot p_i)^T$ на v для $T\in\mathbb{N}$. Поскольку множество таких остатков конечно, найдутся $T_1<T_2$ с $r_{T_1}=r_{T_2}$. Следовательно,

$$\big((\xi\cdot p_i)^{T_1}+(\xi\cdot p_i)^{T_2}\big) \vdots\, v.$$

Вынося общий множитель, получаем

$$(\xi\cdot p_i)^{T_1}\cdot\big(1+(\xi\cdot p_i)^{T_2-T_1}\big) \vdots\, v. \tag{3}$$

Так как $v(0)=1$, то $(\xi,v)=1$, а из неприводимости p_i и условия $v \not\vdots\, p_i$ следует, что $(p_i,v)=1$. Значит, $((\xi\cdot p_i)^{T_1},v)=1$. Отсюда и из (3) следует, что

$$\big(1+(\xi\cdot p_i)^{T_2-T_1}\big) \vdots\, v.$$

Заметим, что

$$1+(\xi\cdot p_i)^{T_2-T_1}=1+\xi\cdot p_i\cdot(\xi\cdot p_i)^{T_2-T_1-1}.$$

Таким образом, в качестве $\bar{u}$ можно взять $\bar{u}=(\xi\cdot p_i)^{T_2-T_1-1}$. □

Лемма 3. *Пусть $p_i\in E_2[\xi]$, $i\in\mathbb{N}$, — неприводимый многочлен степени s, а*

$$M=\{\,1,\ \xi p_i\xi^m \mid m=\overline{0,s}\,\}.$$

Тогда $K^{(1)}(M)=M_i^{(1)}$.

Доказательство. Напомним определение класса $M_i^{(1)}$, соответствующего неприводимому многочлену $p_i = a_0 + a_1\xi + \cdots + \xi^s \in E_2[\xi]$ $(i \in \mathbb{N})$:

$$M_i^{(1)} = \{\mu \in E_2'(\xi) \mid \mu + \mu(0) = \xi p_i \mu',\ \mu' = u'/v' \in E_2'(\xi),\ (v', p_i) = 1\}.$$

Отсюда для $\mu \in M_i^{(1)}$ возможны два случая:

- если $\mu(0) = 0$, то $\mu = \xi p_i \mu'$,
- если $\mu(0) = 1$, то $\mu = 1 + \xi p_i \mu'$.

Так как все элементы M принадлежат $M_i^{(1)}$, а сам класс $M_i^{(1)}$ $K^{(1)}$-замкнут, то $K^{(1)}(M) \subseteq M_i^{(1)}$.

Докажем обратное включение. Сначала покажем по индукции, что $\xi p_i \xi^t \in K^{(1)}(M)$ для всех $t \in \mathbb{Z}_+$.

База индукции: для $t = \overline{0, s}$ это верно по определению M.

Индукционный переход: Пусть $t \geqslant s+1$ и для всех $t' < t$ уже доказано, что $\xi p_i \xi^{t'} \in K^{(1)}(M)$. Представим $t = q(s+1) + r$, где $q \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant r \leqslant s$. Заметим, что

$$(\xi p_i)(\xi p_i) = (\xi p_i) \cdot (a_0\xi + a_1\xi^2 + \cdots + \xi^{s+1}).$$

Тогда, используя, уже полученные элементы $\xi p_i \xi^{m+r}$ для $m = q, \ldots, (s+1)q - 1$ (для которых $m + r < t$), получаем:

$$(\xi p_i \xi^r)(\xi p_i)^q + \sum_{m=q}^{(s+1)q-1} \xi p_i \xi^{m+r} \cdot b_m = \xi p_i \xi^{q(s+1)+r} = \xi p_i \xi^t \in K^{(1)}(M),$$

где b_m — коэффициенты многочлена p_i^q при ξ^{m-q}. Таким образом, индукционный шаг выполнен. Следовательно, $\xi p_i \xi^t \in K^{(1)}(M)$ для любого $t \in \mathbb{Z}_+$.

Для произвольного многочлена $u(\xi) = b_0' + b_1'\xi + \cdots + b_n'\xi^n \in E_2[\xi]$ имеем следующее:

$$\xi p_i \cdot u = \sum_{j=0}^{n} \xi p_i \xi^j b_j' \in K^{(1)}(M).$$

Далее, пусть $\mu = u/v \in E_2'(\xi)$, $u, v \in E_2[\xi]$, $(u, v) = 1$, $v \not\vdots\, p_i$. По лемме 2, для такого v существует $\bar{u} \in E_2[\xi] : (1 + \xi p_i \bar{u}) \vdots\, v$, т.е. $1 + \xi p_i \bar{u} = v\tilde{u}$ для некоторого $\tilde{u} \in E_2[\xi]$.

Элементы $\xi p_i u\tilde{u}$ и $\xi p_i \bar{u}$ принадлежат $K^{(1)}(M)$ по доказанному выше. Применим к ним операцию обратной связи:

$$Fb(\xi p_i u\tilde{u},\ \xi p_i \bar{u}) = \frac{\xi p_i u\tilde{u}}{1+\xi p_i \bar{u}} = \frac{\xi p_i u\tilde{u}}{v\tilde{u}} = \frac{\xi p_i u}{v} \in K^{(1)}(M).$$

Таким образом, $\xi p_i \cdot \dfrac{u}{v} \in K^{(1)}(M)$ для любой правильной дроби $\mu = u/v$ с $v \not\vdots\, p_i$.

Каждый элемент $M_i^{(1)}$ имеет вид либо $\xi p_i \mu$, либо $1+\xi p_i \mu$ с указанными ранее свойствами. Следовательно, $M_i^{(1)} \subseteq K^{(1)}(M)$.

Из двух включений получаем $K^{(1)}(M) = M_i^{(1)}$. □

3. Основные результаты

Лемма 4. *Класс $\tilde{M}_i$ $(i \in \mathbb{N} \setminus \{1\})$ является K-конечнопорожденным. Базис $\tilde{M}_i$ — множество*

$$M = \Big\{x_1 + x_2, \sum_{m=0}^{s} \xi p_i \xi^m x_m\Big\},$$

где p_i — неприводимый над E_2 многочлен степени s, соответствующий предполному классу линейных автоматов M_i.

Доказательство. Рассмотрим класс $\tilde{M}_i$, состоящий из всех автоматов класса M_i с нулевым свободным членом:

$$\tilde{M}_i = \Big\{f \in L_2 \mid f(x_1,\dots,x_n) = \sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j,\ \mu_j \in M_i^{(1)}\Big\}, \tag{4}$$

где $M_i^{(1)} = \big\{\mu \in E_2'(\xi) \mid \mu + \mu(0) = \xi p_i \mu',\ \mu' = u'/v' \in E_2'(\xi),\ (v', p_i) = 1\big\}$.

Докажем, что $\tilde{M}_i$ K-замкнут.

1. Каждый автомат из $\tilde{M}_i$ сохраняет нулевую последовательность. По лемме 1, в K-замыкании множества таких автоматов можно получить только автоматы, сохраняющие нулевую последовательность, т.е. с нулевым свободным членом.

2. Коэффициенты μ_j принадлежат классу $M_i^{(1)}$, который $K^{(1)}$-замкнут. Напомним, что операции композиции над линейными автоматами индуцируют $K^{(1)}$-операции над их коэффициентами. Следовательно, при замыкании коэффициенты остаются в $M_i^{(1)}$.

Из пунктов 1 и 2 следует, что $\tilde{M}_i$ K-замкнут.

Покажем, что $\tilde{M}_i$ K-конечнопорожден. Рассмотрим множество M, состоящее из следующих двух автоматов:

- $f_1 = x_1 + x_2$;
- $f_2 = \sum_{m=0}^{s} \xi p_i \xi^m x_m$.

Автоматы f_1 и f_2 имеют нулевые свободные члены, а коэффициенты при их переменных $U(\{f_1, f_2\}) = \{1,\ \xi p_i \xi^m \mid m = \overline{0,s}\}$ лежат в $M_i^{(1)}$. Следовательно, $f_1, f_2 \in \tilde{M}_i$. В силу K-замкнутости $\tilde{M}_i$ (доказано выше) получаем $K(M) \subseteq \tilde{M}_i$.

Отождествив переменные в f_1, получим $x_1 + x_1 = 0$, т.е. $0 \in K(M)$. Кроме того, $f_1(0, x) = 1 \cdot x \in K(M)$, следовательно, $x \in K(M)$.

Подставляя нулевой автомат в f_2, получаем все автоматы вида $\xi p_i \xi^m x$ ($m = \overline{0,s}$). По лемме 3 множество $\{1,\ \xi p_i \xi^m \mid m = \overline{0,s}\}$ порождает класс $M_i^{(1)}$ относительно $K^{(1)}$-операций. Поскольку операции композиции над автоматами индуцируют $K^{(1)}$-операции над их коэффициентами, то в $K(M)$ можно получить любой автомат вида μx с $\mu \in M_i^{(1)}$.

При подстановке f_1 в самого себя получим сумматор от любого числа переменных. Подставляя в этот сумматор автоматы $\mu_1 x_1, \ldots, \mu_n x_n$, получим произвольный автомат из $\tilde{M}_i$ (4). Следовательно, $\tilde{M}_i \subseteq K(M)$.

Из двух включений $K(M) \subseteq \tilde{M}_i$ и $\tilde{M}_i \subseteq K(M)$ получаем $K(M) = \tilde{M}_i$.

В K-замыкании автомата f_1 получаются только сумматоры, поэтому f_1 не порождает $\tilde{M}_i$. В $K^{(1)}$-замыкании коэффициентов автомата f_2 отсутствует 1, поскольку все эти коэффициенты принадлежат $K^{(1)}$-замкнутому классу $R_1^{(1)}$, а $1 \notin R_1^{(1)}$. Следовательно, $1 \cdot x \notin K(\{f_2\})$, но $1 \cdot x \in \tilde{M}_i$. Значит, f_2 также не порождает $\tilde{M}_i$ самостоятельно. Таким образом, M является базисом класса $\tilde{M}_i$. □

Лемма 5. *K-предполный класс M_0 не может быть порождён конечным множеством линейных автоматов относительно операций композиции.*

Доказательство. Напомним, что

$$M_0 = \left\{ f \in L_2 \mid \forall \mu \in U(f)\ \ \mu \in M_0^{(1)} \right\},$$

где $M_0^{(1)} = \left\{ \mu \in E_2'(\xi) \mid \mu + \mu(0) = u'/v',\ u', v' \in E_2[\xi],\ \deg u' < \deg v' \right\}$. Следовательно, для любого $\mu \in M_0^{(1)}$ выполнено $\deg u \leqslant \deg v$ (в представлении $\mu = u/v$), поскольку если $\mu(0) = 0$, то $\deg u < \deg v$; если $\mu(0) = 1$, то $\deg u = \deg v$.

Любой автомат $f \in M_0$ имеет вид

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i + \mu_0, \quad \mu_i \in M_0^{(1)},\ \mu_0 \in E_2'(\xi).$$

Предположим, что M_0 порождается конечным множеством линейных автоматов $\{f_1, \dots, f_p\} \subset M_0$. Покажем, что это приводит к противоречию.

Проанализируем, как меняется свободный член под действием операций композиции.

Переименование переменных не влияет на коэффициенты и свободный ход автомата. Отождествление переменных, хотя и изменяет коэффициенты, не затрагивает свободный член, поэтому разность степеней числителя и знаменателя свободного хода сохраняется.

Пусть $f, g \in M_0$. Тогда они имеют следующий вид:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i x_i + \mu_n x_n + \mu_0, \qquad g(x_1', \dots, x_m') = \sum_{j=1}^{m} \mu_j' x_j' + \mu_0'.$$

Подставим g в f на вход x_n (без ограничения общности):

$$f(x_1, \dots, x_{n-1}, g(x_1', \dots, x_m')) = \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i x_i + \sum_{j=1}^{m} \mu_n \mu_j' x_j' + (\mu_n \mu_0' + \mu_0).$$

Обозначим

$$\mu_n = \frac{u}{v}, \quad \mu_0' = \frac{u_1}{v_1}, \quad \mu_0 = \frac{u_2}{v_2}.$$

Тогда

$$\tilde{\mu}_0 = \mu_n \mu_0' + \mu_0 = \frac{u u_1 v_2 + u_2 v v_1}{v v_1 v_2}.$$

Степень числителя не превосходит $\max(\deg(u u_1 v_2),\ \deg(u_2 v v_1))$. В первом случае:

$$\deg(u u_1 v_2) - \deg(v v_1 v_2) = (\deg u_1 - \deg v_1) + (\deg u - \deg v) \leqslant (\deg u_1 - \deg v_1),$$

поскольку $\mu_n \in M_0^{(1)}$ и $\deg u \leqslant \deg v$.

Во втором случае:

$$\deg(u_2 v v_1) - \deg(v v_1 v_2) = \deg u_2 - \deg v_2.$$

Итак, разность степеней числителя и знаменателя свободного члена при подстановке не превосходит максимальной из соответствующих разностей для f и g.

Пусть в автомате f применена обратная связь по x_n (без ограничения общности), то есть $\mu_n(0) = 0$ (тогда $\deg u < \deg v$). Получаем:

$$Fb_{x_n}(f) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\mu_i}{1+\mu_n} x_i + \frac{\mu_0}{1+\mu_n}.$$

Для свободного члена имеем:

$$\frac{\mu_0}{1+\mu_n} = \frac{u_2/v_2}{1+u/v} = \frac{u_2 v}{v_2(u+v)}.$$

Так как $\deg(u+v) = \deg v$, находим:

$$\deg(u_2 v) - \deg(v_2(u+v)) = \deg u_2 - \deg v_2.$$

Значит, разность степеней числителя и знаменателя свободного члена при обратной связи не увеличивается.

Таким образом, все операции композиции не увеличивают разность степеней у свободного члена автомата. Исходное конечное множество $\{f_1, \ldots, f_p\}$ имеет некоторую максимальную разность степеней свободного члена k_0. Следовательно, ни один автомат из $K(\{f_1, \ldots, f_p\})$ не может иметь свободный член с разностью степеней больше k_0. Однако в M_0 есть автоматы с любой наперёд заданной разностью. Противоречие. Значит, M_0 не является K-конечнопорожденным классом. □

Лемма 6. *K-предполный класс R_0^d не является K-конечнопорожденным.*

Доказательство. По определению класса R_0^d:

$R_0^d = \{f \mid f \in L_2, \forall\ i = \overline{1,n},$ если x_i — единственная непосредственная переменная f, $\mu_i = \frac{u_i}{v_i}$, то $\deg\ u_i \leqslant \deg\ v_i$, иначе $\mu_i \in R_0^{(1)}\}$

Таким образом, для каждого автомата f из R_0^d верно следующее:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i + \mu_0, \quad \mu_0 \in E_2'(\xi),$$

и для всех i имеем $\deg u_i \leqslant \deg v_i$ (где $\mu_i = u_i/v_i$).

Предположим, что R_0^d порождается конечным множеством автоматов $\{f_1, \ldots, f_p\} \subset R_0^d$.

Проанализируем, как меняется свободный член при применении операций подстановки и обратной связи (переименование и отождествление переменных не влияют на него).

Как показано в доказательстве леммы 5, при подстановке разность степеней свободного члена не может превысить наибольшую из разностей исходных автоматов. Это рассуждение остаётся справедливым и для класса R_0^d, поскольку для любого коэффициента μ автомата из R_0^d выполнено $\deg u \leqslant \deg v$.

Пусть в автомате f применена обратная связь по переменной x_n. Следовательно, она не является непосредственной, и $\mu_n \in R_0^{(1)}$, то есть $\deg u < \deg v$ (в представлении $\mu_n = u/v$), а, значит $\deg(u+v) = \deg v$.

Для свободного члена имеем:

$$\frac{\mu_0}{1+\mu_n} = \frac{u'/v'}{1+u/v} = \frac{u'v}{v'(u+v)}.$$

Следовательно,

$$\deg(u'v) - \deg(v'(u+v)) = \deg u' + \deg v - \deg v' - \deg v = \deg u' - \deg v'.$$

Таким образом, операция обратной связи не меняет разность степеней свободного хода.

Итак, ни одна из операций композиции не позволяет превысить исходную максимальную разность степеней свободного члена. Пусть k_0 — наибольшая из разностей степеней свободных членов автоматов $f_1, \dots, f_p$. Тогда в $K(\{f_1, \dots, f_p\})$ все автоматы имеют разность степеней свободного хода не более k_0. А в R_0^d существуют автоматы с разностью k для любого $k \in \mathbb{N}$. Пришли к противоречию, следовательно R_0^d не является K-конечнопорожденным. □

Лемма 7. *K-предполный класс R_0^e нельзя породить конечным множеством автоматов относительно операций композиции.*

Доказательство. Вспомним определение класса R_0^e:
$R_0^e = \big\{f \big| \ f \in L_2, \ \forall \ i \in \{1, \dots, n\}$, если x_i — единственная существенная переменная f, $\mu_i = \frac{u_i}{v_i}$, то $\deg \ u_i \leqslant \deg \ v_i$, иначе $\mu_i \in R_0^{(1)}\big\}$,

Из определения следует, что каждый автомат $f \in R_0^e$ представим в виде:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i + \mu_0, \quad \mu_0 \in E_2'(\xi),$$

и для всех i имеем $\deg u_i \leqslant \deg v_i$ (где $\mu_i = u_i/v_i$).

Пусть $\{f_1, \dots, f_p\} \subset R_0^e$ — конечное множество, порождающее R_0^e. Среди этих автоматов есть хотя бы один с более чем одной существенной переменной (иначе породить весь класс невозможно). Поскольку такой автомат принадлежит R_0^e и имеет более одной существенной переменной, для всех его коэффициентов $\mu_i = u_i/v_i$ выполнено $\deg u_i < \deg v_i$.

Установим, что нельзя для любого $n \in \mathbb{N}$ в $K(\{f_1, \dots, f_p\})$ получить автомат от n переменных, у которого каждый коэффициент μ_i имеет разность $\deg v_i - \deg u_i = 1$.

Переименование переменных не меняет количества существенных переменных. Отождествление переменных и обратная связь уменьшают их число, поэтому для увеличения числа переменных эти операции не подходят.

Рассмотрим подстановку автомата g на q-й вход (без ограничения общности) f, где $f, g \in R_0^e$:

$$f(x_1, \dots, x_q) = \sum_{i=1}^{q} \mu_i x_i + \mu_0, \quad g(x'_1, \dots, x'_m) = \sum_{j=1}^{m} \mu'_j x'_j + \mu'_0.$$

Тогда

$$\tilde{f}(x_1, \dots, x_{q-1}, x'_1, \dots, x'_m) = f(x_1, \dots, x_{q-1}, g(x'_1, \dots, x'_m)) =$$

$$= \sum_{i=1}^{q-1} \mu_i x_i + \sum_{j=1}^{m} \mu_q \mu'_j x'_j + (\mu_q \mu'_0 + \mu_0).$$

Число переменных результата равно $q + m - 1$. Для нашей цели достаточно рассматривать случаи $q > 1$ и $m > 1$. Тогда все коэффициенты μ_i, μ'_j принадлежат $R_0^{(1)}$, то есть $\deg u_i < \deg v_i$ и $\deg u'_j < \deg v'_j$.

Проанализируем коэффициенты полученного автомата:

1. Коэффициенты μ_i $(i = \overline{1, q-1})$ не изменились, их разность $\deg v_i - \deg u_i \geqslant 1$ сохранилась.
2. Коэффициенты $\mu_q \mu'_j = \dfrac{u_q u'_j}{v_q v'_j}$ имеют разность

$$\deg(v_q v'_j) - \deg(u_q u'_j) = (\deg v_q - \deg u_q) + (\deg v'_j - \deg u'_j) \geqslant 2.$$

Следовательно, у автомата $\tilde{f}$ число коэффициентов с разностью, равной 1, не больше, чем у исходного автомата, в который производилась подстановка.

Таким образом, нельзя с помощью операций композиции из конечного множества автоматов из R_0^e получить для любого $n \geqslant 2$ автомат от n переменных, у которого все коэффициенты при переменных имеют разность $\deg v_i - \deg u_i = 1$. Значит, R_0^e — не K-конечнопорожденный класс.

□

Лемма 8. *K-предполные классы M_i $\bigl(i \in \mathbb{N} \setminus \{1\}\bigr)$ не являются K-конечнопорожденными.*

Доказательство. Для классов M_i справедливо следующее:

$$M_i = \bigl\{f \in L_2 \mid \forall\, \mu \in U(f),\ \mu \in M_i^{(1)}\bigr\},$$

где

$$M_i^{(1)} = \bigl\{\mu \in E_2'(\xi) \mid \mu + \mu(0) = \xi p_i \mu',\ \mu' = u'/v' \in E_2'(\xi),\ (v', p_i) = 1\bigr\}.$$

Для произвольного автомата f из M_i выполнено:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j + \mu_0, \quad \mu_j \in M_i^{(1)},\ \mu_0 \in E_2'(\xi).$$

В классе M_i есть автоматы с любым свободным членом из $E_2'(\xi)$. В частности, существуют константы вида

$$\mu = \frac{u}{v \cdot p_i^d}, \quad u, v \in E_2[\xi],\ (u, v) = 1,\ u, v \not\vdots\, p_i,\ d \in \mathbb{N}.$$

Ниже доказывается, что из конечного множества автоматов из M_i с помощью операций композиции нельзя для произвольного $d, d \in \mathbb{N}$, получить автомат, свободный член которого имеет указанный вид.

Пусть $\{f_1, \ldots, f_p\} \subset M_i$ — конечное множество, порождающее M_i. Рассмотрим операции подстановки и обратной связи для $f, g \in M_i$:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i + \mu_0, \quad g(x_1', \ldots, x_m') = \sum_{j=1}^{m} \mu_j' x_j' + \mu_0'.$$

Подставим g на n-й вход f (без ограничения общности):

$$f(x_1, \ldots, x_{n-1}, g) = \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i x_i + \sum_{j=1}^{m} \mu_n \mu_j' x_j' + (\mu_n \mu_0' + \mu_0).$$

Обозначим

$$\mu_n = \frac{u}{v}, \quad (u, v) = 1,\ v \not\vdots\, p_i,$$

$$\mu_0' = \frac{u_1}{v_1 p_i^{d_1}}, \qquad \mu_0 = \frac{u_2}{v_2 p_i^{d_2}},$$

с $(u_1, v_1) = (u_2, v_2) = 1$, $v_1, v_2 \not\vdots\, p_i$, $d_1, d_2 \in \mathbb{Z}_+$.

Тогда, полагая $d_x = \max(d_1, d_2)$, получаем

$$\tilde{\mu}_0 = \mu_n \mu_0' + \mu_0 = \frac{u u_1 v_2 p_i^{d_x - d_1} + u_2 v v_1 p_i^{d_x - d_2}}{v v_1 v_2 p_i^{d_x}}.$$

Следовательно, степень p_i в знаменателе свободного члена при подстановке не превосходит максимума из исходных степеней d_1 и d_2.

Пусть к переменной x_n автомата f применима обратная связь, т.е. $\mu_n(0) = 0$. Из $\mu_n \in M_i^{(1)}$ следует, что $\mu_n = \dfrac{\xi p_i u}{v}$, $(u, v) = 1$, $v \not\vdots\, p_i$.

Операция обратной связи даёт

$$Fb_{x_n}(f) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\mu_i}{1 + \mu_n}\, x_i + \frac{\mu_0}{1 + \mu_n}.$$

Запишем $\mu_0 = \dfrac{u_1}{v_1 p_i^d}$, $(u_1, v_1) = 1$, $v_1 \not\vdots\, p_i$, $d \in \mathbb{Z}_+$. Тогда

$$\frac{\mu_0}{1 + \mu_n} = \frac{u_1}{v_1 p_i^d} \cdot \frac{v}{\xi p_i u + v}.$$

Поскольку $\big(\xi p_i u + v\big) \not\vdots\, p_i$, степень p_i в знаменателе не увеличивается.

Получили, что ни одна из операций композиции не позволяет увеличить степень p_i в знаменателе свободного члена сверх максимальной степени, присутствующей в исходном конечном множестве. Значит, из конечного множества автоматов из M_i нельзя получить автомат со свободным членом $\dfrac{u}{v \cdot p_i^d}$ для произвольного $d \in \mathbb{N}$. Таким образом, M_i $(i \in \mathbb{N} \setminus \{1\})$ не являются K-конечнопорожденными классами. □

Лемма 9. *K-предполные классы R_i^d $(i \in \mathbb{N} \setminus \{1\})$ нельзя породить конечным множеством автоматов относительно операций композиции.*

Доказательство. Для $i \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$

$R_i^d = \big\{ f \big|\ f \in L_2,\ \forall\, j = \overline{1, n},$ если x_j — единственная непосредственная переменная f, $\mu_j = \dfrac{u_j}{v_j}$, то $v_j \not\vdots\, p_i$, иначе $\mu_j \in R_i^{(1)} \big\}$, где

$$R_i^{(1)} = \big\{ \mu \in E_2'(\xi) \mid \mu = u/v,\ u, v \in E_2[\xi],\ (u, v) = 1,\ u \,\vdots\, p_i \big\},$$

а $p_i = a_0 + a_1 \xi + \dots + \xi^s$ — неприводимый над E_2 многочлен.

Любой автомат $f \in R_i^d$ имеет следующий вид:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j + \mu_0,$$

где $\mu_j = u_j/v_j$, $(u_j, v_j) = 1$, $v_j \not\vdots\, p_i$, а μ_0 — произвольный элемент $E_2'(\xi)$.

Класс R_i^d содержит автоматы с любым свободным членом из $E_2'(\xi)$. Например, в нём есть константы вида

$$\mu = \frac{u}{v \cdot p_i^k}, \quad u, v \in E_2[\xi],\ (u, v) = 1,\ u, v \not\vdots\, p_i,\ k \in \mathbb{N}.$$

Как и в лемме 8 для элементов M_i, так и в данной лемме для элементов из R_i^d выполнены следующие условия: $v_j \not\vdots\, p_i$ и переменные, не являющиеся непосредственными, принадлежат $R_i^{(1)}$. Поэтому рассуждение леммы 8 о том, что подстановка и обратная связь не увеличивают степень p_i в знаменателе, применимо для класса R_i^d.

Следовательно, ни одно конечное множество автоматов не порождает R_i^d. Тогда R_i^d не может быть K-конечнопорожденным классом. □

Лемма 10. *K-предполные классы линейных автоматов R_i^e, $i \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ не являются K-конечнопорожденными.*

Доказательство. Для $i \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ класс R_i^e состоит из автоматов $f \in L_2$, у которых:

- если x_j — единственная существенная переменная, то для $\mu_j = u_j/v_j$ выполнено $v_j \not\vdots\, p_i$;
- иначе $\mu_j \in R_i^{(1)}$.

Произвольный автомат $f \in R_i^e$ представим в виде

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j + \mu_0,$$

где $\mu_j = u_j/v_j$, $(u_j, v_j) = 1$, $v_j \not\vdots\, p_i$, а μ_0 — произвольный элемент $E_2'(\xi)$.

Докажем, что из конечного множества автоматов из R_i^e нельзя получить автомат от n переменных (для любого $n \in \mathbb{N}$), у которого каждый коэффициент μ_j имеет вид $\mu_j = \dfrac{p_i u_j'}{v_j}$ с $u_j', v_j \not\vdots\, p_i$, т.е. ни один коэффициент не делится на p_i^2.

Пусть $\{f_1, \ldots, f_p\} \subset R_i^e$ — конечное множество, порождающее R_i^e. Поскольку иначе породить R_i^e нельзя, среди автоматов $f_1, \ldots, f_p$ есть хотя бы один с более чем одной существенной переменной. Для такого автомата все коэффициенты имеют вид $\mu_j = \dfrac{p_i u_j'}{v_j}$, где $v_j \not\vdots\, p_i$.

Для увеличения числа переменных автомата достаточно рассмотреть только операцию подстановки.

Подставим автомат g на k-й вход f (без ограничения общности), где $f, g \in R_i^e$:

$$f(x_1, \ldots, x_k) = \sum_{j=1}^{k} \mu_j x_j + \mu_0, \qquad g(x_1', \ldots, x_m') = \sum_{q=1}^{m} \mu_q' x_q' + \mu_0'.$$

Тогда

$$\tilde{f}(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_1', \ldots, x_m') = f(x_1, \ldots, x_{k-1}, g) =$$
$$= \sum_{j=1}^{k-1} \mu_j x_j + \sum_{q=1}^{m} \mu_k \mu_q' x_q' + (\mu_k \mu_0' + \mu_0).$$

Число переменных результата равно $k+m-1$, поэтому для увеличения числа переменных достаточно рассматривать случаи $k > 1$ и $m > 1$. Все коэффициенты μ_j, μ_q' принадлежат $R_i^{(1)}$, то есть

$$\mu_j = \frac{p_i^{t_j} \tilde{u}_j}{v_j}, \quad \mu_q' = \frac{p_i^{t_q'} \tilde{u}_q'}{v_q'},$$

где $\tilde{u}_j, v_j, \tilde{u}_q', v_q' \not\vdots\, p_i$, $t_j, t_q' \in \mathbb{N}$.

Проанализируем коэффициенты полученного автомата:

1. Коэффициенты μ_j $(j = \overline{1, k-1})$ не изменились, их показатели t_j сохранились.
2. Коэффициенты $\mu_k \mu_q' = \dfrac{p_i^{t_k + t_q'} \tilde{u}_k \tilde{u}_q'}{v_k v_q'}$ имеют показатель $t_k + t_q' \geqslant 2$.

Следовательно, у автомата $\tilde{f}$ число коэффициентов с показателем $t = 1$ не больше, чем у исходного автомата, в который производилась подстановка.

Таким образом, из конечного множества автоматов из R_i^e с помощью операций композиции нельзя получить автомат от произвольного числа переменных, у которого все коэффициенты имеют показатель $t = 1$ (то есть делятся на p_i, но не на p_i^2). Значит, R_i^e $(i \in \mathbb{N} \setminus \{1\})$ не являются K-конечнопорожденными классами. $\square$

Теорема 1. *Для K-предполного класса $Q \subset L_2$ следующие утверждения равносильны:*

1. *Q не принадлежит A-критериальной системе $\mathcal{J}_A$;*
2. *Q не является K-конечнопорожденным.*

Доказательство. Напомним, что совокупность всех K-предполных классов в L_2 имеет вид:

$$\mathcal{J}_2 = \bigl\{T_0, T_1, V_0, V_1, M_i, R_j^e, R_j^d \mid i \in \mathbb{Z}_+,\ j \in \mathbb{Z}_+ \setminus \{1\}\bigr\}.$$

A-критериальная система состоит из классов

$$\mathcal{J}_A = \bigl\{T_0, T_1, V_0, V_1, M_1\bigr\}.$$

Следовательно, разность $\mathcal{J}_2 \setminus \mathcal{J}_A$ включает классы

$$\bigl\{M_i, R_j^e, R_j^d \mid i \in \mathbb{Z}_+ \setminus \{1\},\ j \in \mathbb{Z}_+ \setminus \{1\}\bigr\}.$$

Докажем каждую импликацию.

($1 \Rightarrow 2$). Если $Q \notin \mathcal{J}_A$, то по леммам 5–10 Q не является K-конечнопорожденным. (Эти леммы охватывают все K-предполные классы, не входящие в $\mathcal{J}_A$.)

($2 \Rightarrow 1$). Предположим, что Q не является K-конечнопорожденным. Если бы Q принадлежал $\mathcal{J}_A$, то по результату [3] он был бы K-конечнопорожденным, что противоречит предположению. Следовательно, $Q \notin \mathcal{J}_A$. □

Следствие 1. *Если K-предполный класс линейных автоматов не является K-конечнопорожденным, то он является A-полным в L_2.*

Доказательство. Пусть Q — K-предполный класс, не являющийся K-конечнопорожденным. По теореме 1 $Q \notin \mathcal{J}_A$. Так как Q — K-предполный, он не может быть строгим подклассом никакого собственного K-замкнутого класса. В частности, Q не лежит ни в одном классе из $\mathcal{J}_A$. Тогда по теореме из [4] $A(Q) = L_2$, то есть Q является A-полным в L_2. □

4. Заключение

В работе изучена задача K-конечнопорожденности для всех K-предполных классов в L_2, не входящих в A-критериальную систему.

Доказано, что классы M_i, R_i^e, R_i^d (при $i \in \mathbb{Z}_+ \setminus \{1\}$) не являются K-конечнопорожденными. Для K-замкнутых классов $\tilde{M}_j$ ($j \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$) предъявлены конечные базисы, что доказывает их K-конечнопорожденность. Также было доказано, что всё не K-конечнопорожденные предполные классы являются A-полными классами в L_2.

Автор благодарит своего научного руководителя профессора кафедры МаТИС механико-математического факультета МГУ, д.ф.-м.н. Часовских Анатолия Александровича за предложенную тему и всестороннюю помощь в работе над проблемой.

Список литературы

[1] Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С., *Введение в теорию автоматов*, Наука, Москва, 1985, 320 с.

[2] Гилл, А., *Линейные последовательностные машины*, Наука, Москва, 1974, 288 с.

[3] Бирюкова В. А., "Задача K-конечнопорожденности для предполных классов линейных автоматов, составляющих A-критериальную систему в пространстве линейных автоматов", *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **26**:4 (2022), 109–133.

[4] Часовских А. А., "О полноте в классе линейных автоматов", *Математические вопросы кибернетики*, **3** (1991), 140—166.

[5] Буевич В. А., "Об алгоритмической неразрешимости распознавания A-полноты для ограниченно-детерминированных функций", *Матем. заметки*, **11**:6 (1972), 687–697. DOI: 10.1007/BF01093729.

Статья поступила 4 июня 2026 г.

On the K-finite generation of precomplete classes of linear automata

V. A. Biryukova

We study the problem of K-finite generation for precomplete classes of linear automata over the field E_2. It is proved that the classes not belonging to the A-criterial system are not K-finitely generated. In addition, a countable series of K-closed classes that are K-finitely generated is found. It is also shown that any K-precomplete class which is not K-finitely generated is A-complete.

Keywords: finite automaton, linear automaton, closed class, precomplete class, composition operations, A-closure, K-finite generation, bases of closed classes.

References

[1] Kudryavtsev V. B., Aleshin S. V., Podkolzin A. S., *Introduction to Automata Theory*, Nauka (Science), Moscow, 1985 (In Russian), 320 pp.

[2] Gill, A., *Linear Sequential Circuits: Analysis, Synthesis, and Applications*, McGraw-Hill, New York, 1966, 215 pp.

[3] Biryukova V. A., "The Problem of K-Finite Generation for Precomplete Classes of Linear Automata Constituting an A-Criterion System in the Space of Linear Automata", *Intelligent Systems. Theory and Applications*, **26**:4 (2022), 109–133 (In Russian).

[4] Chasovskikh A. A., "On Completeness in the Class of Linear Automata", *Mathematical Problems of Cybernetics*, **3** (1991), 140–166 (In Russian).

[5] Buevich V. A., "On the Algorithmic Undecidability of A-Completeness for Boundedly Determinate Functions", *Mathematical Notes*, **11**:6 (1972), 687–697. DOI: 10.1007/BF01093729.

Received on June 4, 2026