

Операции над клеточными автоматами с локаторами

А. В. Дюбанов*

В данной работе предложены операции над клеточными автоматами с локаторами (КАСЛ). Эти операции позволяют описывать одни КАСЛ в виде формул над другими КАСЛ. В качестве примера построена формула, задающая КАСЛ, эквивалентный КАСЛ, выполняющему умножение натуральных чисел за $2n + 2$ такта.

Ключевые слова: клеточные автоматы с локаторами, суперпозиция, формула.

1. Введение

Понятие клеточного автомата с локаторами (далее КАСЛ) введено в работе Э. Э. Гасанова [1] и уточнено в работе Г. В. Калачева [5].

В настоящей работе вводятся следующие операции суперпозиции над КАСЛ:

- $B(\sigma_1, i, \sigma_2, j)$ — подстановка сигналов вещания из σ_2 в σ_1 , где σ_1 и σ_2 — КАСЛ, i и j — номера компонент эфира σ_1 и σ_2 соответственно;
- $S(\sigma_1, i, \sigma_2, j)$ — подстановка состояний из σ_2 в σ_1 , где σ_1 и σ_2 — КАСЛ, i и j — номера компонент состояний σ_1 и σ_2 соответственно;
- $C(\sigma)$ — операция введения управления, где σ — КАСЛ.

Данные операции позволяют описывать одни КАСЛ в виде формул над другими КАСЛ.

В работе Э. Э. Гасанова и Б. Ф. Хайбуллина [2] предложен алгоритм умножения натуральных n -значных чисел за $2n + 2$ тактов с помощью КАСЛ, основанный на равенстве $a \cdot b = \sum_{i=1}^n 2^{i-1} b \cdot a_i$, где $(a_n, a_{n-1}, \dots, a_1)$ — двоичное представление числа a .

Пусть КАСЛ σ_{ct} выполняет суммирование натуральных чисел, σ_{x2} — удвоение числа, σ_{12} — преобразование из унарного в двоичное представление числа, σ_m притормаживает работу КАСЛ σ_{12} . Эти КАСЛ описаны

* Дюбанов Андрей Васильевич — аспирант каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: andreydyubanovpost@yandex.ru, ORCID: 0009-0009-3969-9713.

Diubanov Andrei Vasilievich — PhD student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intellectual Systems.

в работе [2]. В данной работе доказывается, что КАСЛ, задаваемый формулой

$$\mu = B(S(\sigma_{ct}, 2, \sigma_{x2}, 1), 2, B(C(\sigma_{12}), 0, \sigma_m, 1), 3),$$

эквивалентен КАСЛ из работы [2], выполняющему умножение натуральных чисел.

Автор выражает благодарность Э.Э.Гасанову за постановку задачи и помощь в работе.

2. Термины и определения

Напомним определение клеточного автомата с локаторами. Пусть $\sigma = (\mathbb{Z}^k, Q, V, G, +, L, \varphi, \psi)$ — клеточный автомат с локаторами, где:

- \mathbb{Z}^k — множество k -мерных векторов с целыми координатами; элементы \mathbb{Z}^k — ячейки клеточного автомата σ ;
- Q — некоторое конечное множество — множество состояний; $q_0 \in Q$ — состояние покоя;
- $V = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{h-1}\}$ — упорядоченный набор попарно различных векторов из \mathbb{Z}^k ; V — шаблон соседства клеточного автомата σ ;
- $(G, +)$ — коммутативная полугруппа с нейтральным элементом e ; элементы множества G называются сигналами вещания;
- шаблон локаторов $L = \{\nu_1, \dots, \nu_m\}$ — упорядоченный набор попарно различных рациональных телесных углов в \mathbb{R}^k с вершиной в начале координат;
- локальная функция переходов $\varphi: Q^h \times G^m \rightarrow Q$, $\varphi(\mathbf{q}_0, \mathbf{e}) = q_0$, $\mathbf{q}_0 = (q_0, \dots, q_0) \in Q^h$, $\mathbf{e} = (e, \dots, e) \in G^m$;
- функция вещания $\psi: Q^h \times G^m \rightarrow G$, $\psi(\mathbf{q}_0, \mathbf{e}) = e$, $\mathbf{q}_0 = (q_0, \dots, q_0) \in Q^h$, $\mathbf{e} = (e, \dots, e) \in G^m$

В общем случае локатор — это телесный угол, границы которого являются частями гиперплоскостей, задаваемых линейными уравнениями с целыми коэффициентами. $\Omega = \mathbb{Z}^k \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ называется полным телесным углом. Дадим наименования тем локаторам на плоскости, которые будем использовать далее в настоящей работе:

- $N = \{(x, y) : x = 0, y > 0\}$ назовём «север»;
- $NE = \{(x, y) : x > 0, y = x\}$ назовём «северо-восток»;
- $E = \{(x, y) : x > 0, y = 0\}$ назовём «восток»;

- $SE = \{(x, y) : x > 0, y = -x\}$ назовём «юго-восток»;
- $S = \{(x, y) : x = 0, y < 0\}$ назовём «юг»;
- $SW = \{(x, y) : x < 0, y = x\}$ назовём «юго-запад»;
- $W = \{(x, y) : x < 0, y = 0\}$ назовём «запад»;
- $NW = \{(x, y) : x < 0, y = -x\}$ назовём «северо-запад».

Состоянием клеточного автомата с локаторами σ назовём пару (g, f) , где g — произвольная функция, определённая на множестве \mathbb{Z}^k , принимающая значения из G , называемая состоянием эфира, f — произвольная функция, определённая на множестве \mathbb{Z}^k , принимающая значения из Q , называемая распределением состояний клеточного автомата с локаторами. Если $\alpha \in \mathbb{Z}^k$ и (g, f) — состояние клеточного автомата с локаторами σ , то значение $g(\alpha)$ назовём сигналом ячейки α , определяемым состоянием (g, f) , а значение $f(\alpha)$ — состоянием ячейки α , определяемым состоянием (g, f) .

Функции φ и ψ зависят от переменных $x_0, x_1, \dots, x_{h-1}, z_1, \dots, z_m$. Для того чтобы установить взаимно однозначное соответствие между векторами из V и телесными углами из L и переменными функций φ и ψ , воспользуемся способом, предложенным в работе [1]. Будем индексировать переменные функций φ и ψ самими векторами и телесными углами, т.е. считать, что φ и ψ зависят от переменных $x_0, x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_{h-1}}, z_{\nu_1}, \dots, z_{\nu_m}$, индекс переменной x_0 есть нулевой вектор $(0, \dots, 0) \in \mathbb{Z}^k$.

3. Операция подстановки состояния

Пусть $\sigma_D = (\mathbb{Z}^k, Q_D, V_D, G_D, +_D, L_D, \varphi_D, \psi_D)$, $\sigma_E = (\mathbb{Z}^k, Q_E, V_E, G_E, +_E, L_E, \varphi_E, \psi_E)$ — клеточные автоматы с локаторами, для которых выполнены следующие условия:

- $Q_D = Q_{D_1} \times \dots \times Q_{D_{r-1}} \times Q_{D_r} \times Q_{D_{r+1}} \times \dots \times Q_{D_n}$, $n \geq 1$,
- $Q_E = Q_{E_1} \times \dots \times Q_{E_{s-1}} \times Q_{E_s} \times Q_{E_{s+1}} \times \dots \times Q_{E_m}$, $m \geq 1$,
- $Q_{D_r} = Q_{E_s}$,
- $|V_D| = h - 1$, $|L_D| = l$, $|V_E| = p - 1$, $|L_E| = u$,
- $\varphi_D = (\varphi_{D_1}, \dots, \varphi_{D_n})$, $\varphi_{D_i} : Q_D^h \times G_D^l \rightarrow Q_{D_i}$, $i \in \{1, \dots, n\}$,
- $\varphi_E = (\varphi_{E_1}, \dots, \varphi_{E_m})$, $\varphi_{E_i} : Q_E^p \times G_E^u \rightarrow Q_{E_i}$, $i \in \{1, \dots, m\}$.

Тогда скажем, что клеточный автомат с локаторами

$$\sigma_F = (\mathbb{Z}^k, Q_F, V_F, G_F, +_F, L_F, \varphi_F, \psi_F)$$

получен из автоматов σ_D и σ_E с помощью подстановки в r -ю компоненту состояния автомата σ_D s -й компоненты состояния автомата σ_E (обозначим этот факт как $\sigma_F = S(\sigma_D, r, \sigma_E, s)$), если: $Q_F = Q_D \times Q_E$, $V_F = V_D \cup V_E$, $G_F = G_D \times G_E$, $+_F = +_D \times +_E$, $L_F = L_D \cup L_E$, $\varphi_F = (\varphi_{D_1}, \dots, \varphi_{D_{r-1}}, \varphi_{E_s}, \varphi_{D_{r+1}}, \dots, \varphi_{D_n}, \varphi_E)$, $\psi_F = (\psi_D, \psi_E)$.

Фактически результат функционирования автомата σ_F определяется следующим образом:

- автомат σ_E функционирует в соответствии со своими функциями φ_E и ψ_E ;
- автомат σ_D формирует сигналы вещания в соответствии со своей функцией вещания ψ_D ;
- все компоненты состояния автомата σ_D , кроме r -й компоненты, формируются в соответствии с функциями перехода φ_D , а r -я компонента состояния принудительно устанавливается равной s -й компоненте состояния автомата σ_E .

4. Операция подстановки сигнала вещания

Пусть $\sigma_D = (\mathbb{Z}^k, Q_D, V_D, G_D, +_D, L_D, \varphi_D, \psi_D)$, $\sigma_E = (\mathbb{Z}^k, Q_E, V_E, G_E, +_E, L_E, \varphi_E, \psi_E)$ — клеточные автоматы с локаторами, для которых выполнены следующие условия:

- $G_D = G_{D_1} \times \dots \times G_{D_{r-1}} \times G_{D_r} \times G_{D_{r+1}} \times \dots \times G_{D_n}$, $n \geq 1$,
- $G_E = G_{E_1} \times \dots \times G_{E_{s-1}} \times G_{E_s} \times G_{E_{s+1}} \times \dots \times G_{E_m}$, $m \geq 1$,
- $G_{D_r} = G_{E_s}$,
- $|V_D| = h - 1$, $|L_D| = l$, $|V_E| = p - 1$, $|L_E| = u$,
- $\psi_D = (\psi_{D_1}, \dots, \psi_{D_n})$, $\psi_{D_i} : Q_D^h \times G_D^l \rightarrow G_{D_i}$, $i \in \{1, \dots, n\}$,
- $\psi_E = (\psi_{E_1}, \dots, \psi_{E_m})$, $\psi_{E_i} : Q_E^p \times G_E^u \rightarrow G_{E_i}$, $i \in \{1, \dots, m\}$.

Тогда скажем, что клеточный автомат с локаторами

$$\sigma_F = (\mathbb{Z}^k, Q_F, V_F, G_F, +_F, L_F, \varphi_F, \psi_F)$$

получен из автоматов σ_D и σ_E с помощью подстановки в r -ю компоненту сигнала вещания автомата σ_D s -й компоненты сигнала вещания автомата σ_E (обозначим этот факт как $\sigma_F = B(\sigma_D, r, \sigma_E, s)$), если: $Q_F = Q_D \times Q_E$, $V_F = V_D \cup V_E$, $G_F = G_D \times G_E$, $+_F = +_D \times +_E$, $L_F = L_D \cup L_E$, $\varphi_F = (\varphi_D, \varphi_E)$, $\psi_F = (\psi_{D_1}, \dots, \psi_{D_{r-1}}, \psi_{E_s}, \psi_{D_{r+1}}, \dots, \psi_{D_n}, \psi_E)$.

Фактически результат функционирования автомата σ_F определяется следующим образом:

- автомат σ_E функционирует в соответствии со своими функциями φ_E и ψ_E ;
- автомат σ_D формирует состояния в соответствии со своей функцией переходов φ_D ;
- все компоненты сигнала вещания автомата σ_D , кроме r -й компоненты, формируются в соответствии с функциями вещания ψ_D , а r -я компонента сигнала вещания принудительно устанавливается равной s -й компоненте сигнала вещания автомата σ_E .

5. Операция введения управления

Пусть $\sigma = (\mathbb{Z}^k, Q, V, G, +, L, \varphi, \psi)$ — клеточный автомат с локаторами, где $|V| = h - 1$, $|L| = m$. Тогда скажем, что клеточный автомат с локаторами $\sigma_c = (\mathbb{Z}^k, Q_c, V, G_c, +_c, L_c, \varphi_c, \psi_c)$ получен из автомата σ с помощью операции введения управления (обозначим этот факт как $\sigma_c = C(\sigma)$), если $Q_c = Q \times G$, $G_c = G \times \{0, 1\}$; $+_c = +, \max$; $L_c = L \cup \{\Omega\}$; $\varphi_c : Q^h \times G^m \times G \times \{0, 1\} \rightarrow Q_c$, $\psi_c : Q^h \times G^m \times G \times \{0, 1\} \rightarrow G_c$, где для любого $\lambda \in Q^h \times G^m$ и любого $\gamma \in G$ выполняется: $\varphi_c(\lambda, \gamma, 0) = x_0$, $\varphi_c(\lambda, \gamma, 1) = (\varphi(\lambda), \psi(\lambda))$, $\psi_c(\lambda, \gamma, 0) = (\gamma, 0)$, $\psi_c(\lambda, \gamma, 1) = (\psi(\lambda), 0)$. Здесь $x_0 \in Q_c$ — состояние текущей ячейки.

Фактически результат функционирования автомата σ_c определяется следующим образом.

- К множеству состояний добавляются все компоненты множества сигналов вещания исходного автомата σ ($Q_c = Q \times G$).
- К сигналу вещания автомата σ добавляется ещё одна компонента (*компонента управления* или *компонента синхронизации*) со своим алфавитом вещания $\{0, 1\}$, заданной на нём полугрупповой функцией \max .
- К шаблону локаторов добавляется полный локатор $\{\Omega\}$, если его там не было.
- Модифицированная локальная функция переходов φ_c устроена таким образом, что, получив сигнал 0 по компоненте управления, ячейка сохраняет своё состояние. Получив сигнал 1 по компоненте управления, ячейка изменяет своё состояние: значения в исходных компонентах формируются в соответствии с исходной функцией φ , в добавленных компонентах — в соответствии с ψ (т.е. в добавленных компонентах состояния сохраняются те же значения, которые ячейка посылает в эфир).

- Похожим образом устроена модифицированная локальная функция вещания ψ_c . Получив по компоненте управления сигнал 1, ячейка осуществляет своё вещание в соответствии с исходной функцией ψ ; получив 0 — посылает в эфир тот же сигнал, который посылала в предыдущем такте (значение сигнала предыдущего такта сохранено в добавленных компонентах состояния). В эфир по компоненте управления ячейка всегда посылает сигнал 0.

6. Пример использования введённых операций для умножения чисел

В работе [2] описано решение клеточными автоматами с локаторами задачи умножения двух натуральных чисел a и b . Пусть $(a_n, a_{n-1}, \dots, a_1)$ — двоичное представление числа a , т.е. $a = \sum_{i=1}^n 2^{i-1} a_i$. Тогда $ab = \sum_{i=1}^n 2^{i-1} b a_i$.

Для вычисления произведения чисел a и b нужно одновременно выполнять три задачи, каждая из которых решается своим автоматом. С помощью автомата σ_{x2} решается задача вычисления чисел $b2^{i-1}$, $i = 1, 2, 3, \dots, n$. С помощью автомата σ_{12} находится двоичное представление числа a , т.е. получаются числа a_1, a_2, \dots, a_n . Автомат σ_{ct} накапливает суммы $S_i = \sum_{j=1}^i 2^{j-1} b a_j$, $i = 1, 2, \dots, n$, $S_0 = 0$. Также используется управляющий автомат σ_m , который синхронизирует работу этих автоматов.

Далее покажем, что автомат

$$\mu = B(S(\sigma_{ct}, 2, \sigma_{x2}, 1), 2, B(C(\sigma_{12}), 0, \sigma_m, 1), 3)$$

решает задачу умножения натуральных чисел и дадим формальные определения автоматов σ_{x2} , σ_{12} , σ_{ct} и σ_m .

6.1. Удвоение натурального числа

Зададим автомат, выполняющий удвоение заданного натурального числа. $\sigma_{x2} = (\mathbb{Z}^2, Q_{x2}, V_{x2}, G_{x2}, +_{x2}, L_{x2}, \varphi_{x2}, \psi_{x2})$, где $Q_{x2} = \{q_0, A, P, O\}$; $V_{x2} = \emptyset$; $G_{x2} = \{0, 1\}$; $+_{x2} = \max$; $L_{x2} = \{N, E, SE, S, W, NW\}$; $\psi_{x2} = 1$,

точно тогда, когда $x_0 = A \vee x_0 = P \vee x_0 = O$;

$$\varphi_{x_2} = \begin{cases} P & \text{если } x_0 = q_0 \wedge z_S = 1 \wedge z_E = 1; \\ q_0 & \text{если } (x_0 = A \wedge (z_E = 1 \vee z_N = 1)) \vee \\ & \vee (x_0 = P \wedge z_S = 1 \wedge z_W = 1); \\ A & \text{если } x_0 = q_0 \wedge ((z_{NW} = 1 \wedge z_W = 1) \vee (z_S = 1 \wedge z_{SE} = 1)); \\ x_0 & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases}$$

Схематически функционирование автомата σ_{x_2} изображено на рисунке 1. Представлены первые 4 такта работы: в нулевом такте (начальное состояние) исходное число задано состоянием A , в первом такте строится проекция числа A , во втором такте получено удвоенное значение A . Каждые два такта автомат удваивает число. Легко заметить, что $R = 2^{\lfloor \frac{t}{2} \rfloor} x$, где R — результат работы автомата, x — исходное число, t — номер такта.

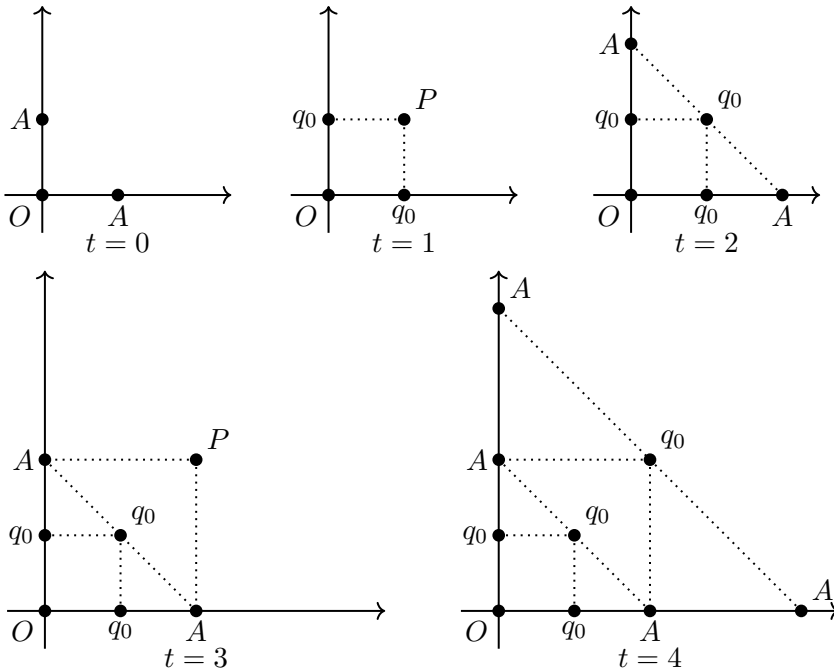


Рис. 1: Функционирование автомата σ_{x_2}

6.2. Перевод из унарного представления в двоичное

Зададим автомат σ_{12} , выполняющий перевод числа из унарного представления в двоичное. Точное решение задачи перевода числа из унарного представления в двоичное приведено в работах [3], [4]. Здесь будем использовать идейное описание такого автомата, представленное в работе [2].

Пусть a — натуральное число, $(a_n, a_{n-1}, \dots, a_1)$ — двоичное представление числа a . Задача перевода числа из унарного представления в двоичное формулируется следующим образом. В начальной конфигурации в активном состоянии находится $a + 1$ ячейка: ячейка $(0, 0)$ в состоянии «начало координат» и ячейки $(1, 0), (2, 0), \dots, (a, 0)$ в состоянии «один».

Задача состоит в том, чтобы в такты с первого по n -й выдавать в эфир сигнал «ноль», если $a_i = 0$, и сигнал «единица», если $a_i = 1$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. При этом в финальной конфигурации активной остаётся только «начало координат». Здесь первым тактом считается такт, следующий после начального.

Алфавит вещания будет иметь вид $G = \{0, 1\} \times \{0, 1\} \times \{0, 1, 2, 3\}$. Полугрупповой операцией по первой компоненте будет сложение по модулю 2, а по второй и третьей — максимум. Первая компонента будет использоваться для вычисления a_i , $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Вторая компонента — для выявления момента окончания вычислений, а третья компонента — для передачи ответа. Состояние покоя будем обозначать как состояние «ноль». Алгоритм решения задачи будет следующий:

1. В каждый такт все ячейки, которые находятся в состоянии «один», передают в эфир сигнал $(1, 1, 0)$.
2. Ячейка в состоянии «один», которая в локатор «восток» получает сигнал $(0, *, *)$, переходит в состояние «ноль». Здесь * означает любой символ. Во всех остальных случаях ячейка не меняет состояние.
3. Если ячейка «начало координат» в локатор «восток» получает сигнал $(0, 1, 0)$, то она посылает в эфир сигнал $(0, 0, 0)$, что соответствует сигналу «ноль».
4. Если ячейка «начало координат» в локатор «восток» получает сигнал $(1, 1, 0)$, то она посылает в эфир сигнал $(0, 0, 1)$, что соответствует сигналу «единица».
5. Если ячейка «начало координат» в локатор «восток» получает сигнал $(0, 0, 0)$, то она посылает в эфир сигнал $(0, 0, 3)$, что соответствует окончанию передачи двоичного представления числа.

Строго говоря, в упомянутых работах окончанию передачи двоичного представления числа соответствует сигнал $(0, 0, 2)$. Нам же в дальнейшем потребуется различать нулевой и последний такт. Чтобы не переопределять σ_{12} , будем сразу использовать $(0, 0, 3)$.

Поскольку согласно пункту 1 каждая ячейка в состоянии «один» передаёт в эфир по первой компоненте значение «1», то «начало координат» получит в локатор «восток» по первой компоненте сумму по модулю 2 количества ячеек в состоянии «один», а это в первый момент равно a_1 . Второй пункт гарантирует, что каждый такт число ячеек в состоянии «один» будет сокращаться вдвое, поэтому во второй такт «начало координат» получит в локатор «восток» по первой компоненте значение a_2 и т.д. Если «начало координат» в локатор «восток» по второй компоненте получит значение «0», то это означает, что ячеек в состоянии «один» больше не осталось, и можно завершать работу.

В таблице 1 приведено поведение описанного выше клеточного автомата с локаторами для случая $a = 5$. Здесь символом Q обозначается строка состояний ячеек, причём O соответствует состоянию «начало координат»; 0 — состоянию «ноль»; 1 — состоянию «один»; символом S обозначается строка посылаемых «началом координат» в эфир сигналов; символом E — строка значений локатора «восток». В такты 1, 2, 3 в третьей компоненте сигнала вещания мы можем наблюдать двоичное представление числа 5 — $(1, 0, 1)$.

Дадим формальное описание:

$$\sigma_{12} = (\mathbb{Z}^2, Q_{12}, V_{12}, G_{12}, +_{12}, L_{12}, \varphi_{12}, \psi_{12}),$$

где $Q_{12} = \{q_0, O, O_1, 1\}$; $V_{12} = \emptyset$; $G_{12} = \{0, 1\} \times \{0, 1\} \times \{0, 1, 2, 3\}$; $+_{12} = +, \max, \max$; $L_{12} = \{E\}$;

$$\varphi_{12} = \begin{cases} q_0 & \text{если } x_0 = 1 \wedge z_E = (0, *, *), \text{ здесь } * \text{ означает любой символ;} \\ O_1 & \text{если } x_0 = O \vee x_0 = O_1; \\ x_0 & \text{во всех остальных случаях;} \end{cases}$$

$$\psi_{12} = \begin{cases} (1, 1, 0) & \text{если } x_0 = 1; \\ (0, 0, 0) & \text{если } x_0 = O_1 \wedge z_E = (0, 1, 0); \\ (0, 0, 1) & \text{если } x_0 = O_1 \wedge z_E = (1, 1, 0); \\ (0, 0, 3) & \text{если } x_0 = O_1 \wedge z_E = (0, 0, 0); \\ (0, 0, 2) & \text{если } x_0 = O; \\ (0, 0, 0) & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases}$$

t		(0,0)	(1,0)	(2,0)	(3,0)	(4,0)	(5,0)
0	Q	O	1	1	1	1	1
	S	(0,0,2)	(1,1,0)	(1,1,0)	(1,1,0)	(1,1,0)	(1,1,0)
	E	(1,1,0)	(0,1,0)	(1,1,0)	(0,1,0)	(1,1,0)	(0,0,0)
1	Q	O ₁	q ₀	1	q ₀	1	q ₀
	S	(0,0,1)	(0,0,0)	(1,1,0)	(0,0,0)	(1,1,0)	(0,0,0)
	E	(0,1,0)	(0,1,0)	(1,1,0)	(1,1,0)	(0,0,0)	(0,0,0)
2	Q	O ₁	q ₀	1	q ₀	q ₀	q ₀
	S	(0,0,0)	(0,0,0)	(1,1,0)	(0,0,0)	(0,0,0)	(0,0,0)
	E	(1,1,0)	(1,1,0)	(0,0,0)	(0,0,0)	(0,0,0)	(0,0,0)
3	Q	O ₁	q ₀	q ₀	q ₀	q ₀	q ₀
	S	(0,0,1)	(0,0,0)	(0,0,0)	(0,0,0)	(0,0,0)	(0,0,0)
	E	(0,0,0)	(0,0,0)	(0,0,0)	(0,0,0)	(0,0,0)	(0,0,0)
4	Q	O ₁	q ₀	q ₀	q ₀	q ₀	q ₀
	S	(0,0,3)	(0,0,0)	(0,0,0)	(0,0,0)	(0,0,0)	(0,0,0)
	E	(0,0,0)	(0,0,0)	(0,0,0)	(0,0,0)	(0,0,0)	(0,0,0)

Таблица 1: Перевод числа из унарного представления в двоичное

6.3. Сложение чисел

Пусть a и b — целые числа, $a \geq 0$, $b > 0$. Автомат, выполняющий сложение $a + b$, описан в работе [2]. Идея его функционирования изображена на рисунке 2.

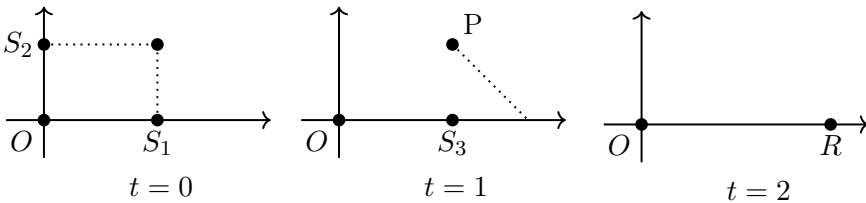


Рис. 2: Сложение целых чисел клеточным автоматом с локаторами

Внесём небольшие изменения в этот автомат и назовём σ_+ полученный автомат, выполняющий сложение $a + b$. Дадим формальное описание: $\sigma_+ = (\mathbb{Z}^2, Q_+, V_+, G_+, \max, L_+, \varphi_+, \psi_+)$, где $Q_+ = \{q_0, S_1, S_2, P_1, P_2, R\} \times \{q_0, O\}$;

$$V_+ = \emptyset; G_+ = \{0, 1, 2, 3\}; L_+ = \{W, S, NW\};$$

$$\varphi_+ = \begin{cases} (P_1, q_0) & \text{если } x_0 = (S_1, q_0); \\ (P_1, O) & \text{если } x_0 = (S_1, O); \\ (P_2, q_0) & \text{если } (x_0 = (q_0, q_0) \wedge z_S = 1 \wedge z_W = 1) \vee \\ & \vee (x_0 = (S_2, q_0) \wedge z_S = 3); \\ (q_0, O) & \text{если } x_0 = (P_1, O) \vee x_0 = (q_0, O); \\ (R, q_0) & \text{если } x_0 = (q_0, q_0) \wedge z_W = 2 \wedge z_{NW} = 2; \\ (q_0, q_0) & \text{во всех остальных случаях;} \end{cases}$$

$$\psi_+ = \begin{cases} 1 & \text{если } x_0 = (S_1, q_0) \vee x_0 = (S_2, q_0); \\ 2 & \text{если } x_0 = (P_1, q_0) \vee x_0 = (P_2, q_0) \vee x_0 = (P_1, O); \\ 3 & \text{если } x_0 = (S_1, O); \\ 0 & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases}$$

В начальной конфигурации в отличном от (q_0, q_0) состоянии находятся ячейки:

- при $a > 0$: $(a, 0) - (S_1, q_0)$; $(0, 0) - (q_0, O)$; $(0, b) - (S_2, q_0)$;
- при $a = 0$: $(0, 0) - (S_1, O)$; $(0, b) - (S_2, q_0)$.

В финальной конфигурации в отличном от (q_0, q_0) состоянии находятся ячейки $(a + b, 0) - (R, q_0)$; $(0, 0) - (q_0, O)$.

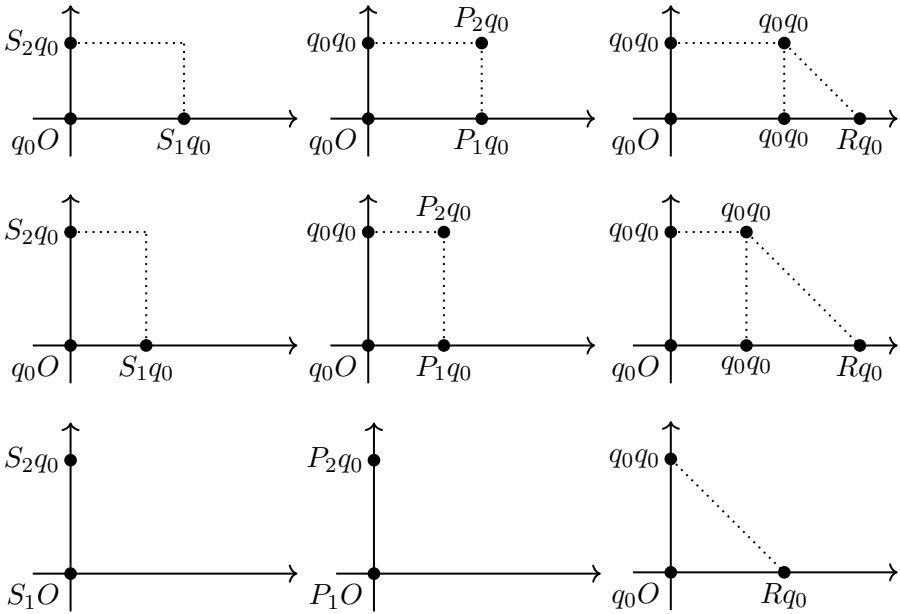
Изобразим работу автомата σ_+ на рисунке 3. В верхнем ряду рассмотрен случай для $0 < a < b$, в среднем — для $0 < b < a$, в нижнем — для $0 = a < b$.

6.4. Накопительный итог

На основе автомата σ_+ построим автомат σ_{ct} , который решает задачу расчёта накопительного итога — сложения поступившего числа с результатом предыдущего суммирования.

Добавим в шаблон локаторов автомата σ_+ полный локатор $\{\Omega\}$. К сигналу вещания автомата σ_+ добавим вторую компоненту. Алфавит вещания по этой компоненте: $\{0, 1, 2, 3\}$. Полугрупповая операция — максимум. В дальнейшем будем использовать её для подстановки сигнала вещания из σ_{12} в σ_{ct} .

К состоянию автомата σ_+ добавим компоненту: $\{q_0, A, P, O\}$. В дальнейшем будем использовать её для подстановки состояния из σ_{x2} в σ_{ct} .

Рис. 3: Диаграмма функционирования σ_+

Локальную функцию переходов зададим таким образом, чтобы ячейка $(a + b, 0)$ переходила не в состояние R , но в состояние S . Таким образом заиклим автомат — результат каждого суммирования будет сохраняться как первое слагаемое для следующего суммирования. В состоянии R ячейка будет переходить только в последнем такте работы.

Мы ввели вторую компоненту эфира с шаблоном локаторов $\{\Omega\}$. Так как Ω не включает вершину, при $S = 0$ ячейка в состоянии S не будет «слышать» значение, передаваемое в эфир «началом координат». Таким образом, приходим к тому, что нужно избежать равенства $S = 0$. Сделаем это следующим образом: в начальный момент примем $S = 1$, в последний такт работы вычтем эту единицу из результата. Кроме того, если в начальный момент времени $S = 0$, ячейка $(0, 0)$ должна одновременно принять состояние «начало координат» и S . Это требует введения дополнительной компоненты состояния или дополнительного состояния «начало координат и S одновременно». Чего мы избегаем, принимая $S = 1$ в начальный момент времени.

В начальной конфигурации в отличном от (q_0, q_0) состоянии находятся три или четыре ячейки.

- Если слагаемые не равны:

1. $(0, 0)$ в состоянии (O, O) («начало координат»);

2. $(1, 0)$ в состоянии (S, q_0) («слагаемое 1»);
 3. $(0, b)$ в состоянии (q_0, A) («слагаемое 2»).
 4. $(b, 0)$ в состоянии (q_0, A) («слагаемое 2»).
- Если слагаемые равны:
 1. $(0, 0)$ в состоянии (O, O) («начало координат»);
 2. $(1, 0)$ в состоянии (S, A) («слагаемое 1»);
 3. $(0, 1)$ в состоянии (q_0, A) («слагаемое 2»).

В финальной конфигурации в отличном от (q_0, q_0) состоянии находятся ячейки: $(x, 0)$ в состоянии (R, q_0) или (R, A) ; $(0, 0)$ в состоянии (O, O) , где x — значение накопленного итога.

Дадим формальное описание. $\sigma_{ct} = (\mathbb{Z}^2, Q_{ct}, V_{ct}, G_{ct}, \max, L_{ct}, \varphi_{ct}, \psi_{ct})$, где: $Q_{ct} = \{q_0, O, S, P, W, R\} \times \{q_0, O, A, P\}$; $V_{ct} = \{(1, 0)\}$; $G_{ct} = \{0, 1, 2\} \times \{0, 1, 2, 3\}$; $L_{ct} = \{S, W, NW, \Omega\}$;

$$\varphi_{ct} = \left\{ \begin{array}{ll} (P, q_0) & \text{если } (x_0 = (q_0, q_0) \wedge z_S = (2, *) \wedge z_W = (1, *) \wedge \\ & \wedge z_\Omega = (*, 1)) \vee (x_0 = (S, q_0) \wedge z_\Omega = (*, 1)); \\ (P, A) & \text{если } x_0 = (S, A) \wedge z_\Omega = (*, 1); \\ (q_0, q_0) & \text{если } (x_0 = (P, q_0)) \vee \\ & \vee (x_0 = (q_0, A) \wedge x_E \neq (S, *) \wedge z_\Omega = (*, 3)) \vee \\ & \vee (x_0 = (S, A) \wedge z_\Omega = (*, 3)) \vee \\ & \vee (x_0 = (S, q_0) \wedge z_\Omega = (*, 3)); \\ (q_0, A) & \text{если } x_0 = (P, A); \\ (S, q_0) & \text{если } (x_0 = (q_0, q_0) \wedge z_W = (2, *) \wedge z_{NW} = (2, *)) \vee \\ & \vee (x_0 = (W, q_0)); \\ (W, q_0) & \text{если } x_0 = (S, q_0) \wedge z_\Omega = (*, 0); \\ (W, A) & \text{если } x_0 = (S, A) \wedge z_\Omega = (*, 0); \\ (S, A) & \text{если } x_0 = (W, A); \\ (R, q_0) & \text{если } x_0 = (q_0, q_0) \wedge x_E = (S, *) \wedge z_\Omega = (*, 3); \\ (R, A) & \text{если } x_0 = (q_0, A) \wedge x_E = (S, *) \wedge z_\Omega = (*, 3); \\ x_0 & \text{во всех остальных случаях;} \end{array} \right.$$

$$\psi_{ct} = \begin{cases} (1, 0) & \text{если } x_0 = (q_0, A); \\ (2, 0) & \text{если } x_0 = (P, *) \vee x_0 = (S, *); \\ (0, 0) & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases}$$

Рассмотрим сценарии функционирования автомата σ_{ct} . На рисунке 4 представлена работа автомата в случае значения «1» во второй компоненте эфира. Рассмотрены три случая (сверху вниз): $A > S$, $A = S$, $A < S$, где A и S - первое и второе слагаемые соответственно.

На рисунке 5 представлена работа автомата в случае значения «0» во второй компоненте эфира. Рассмотрены аналогичные три случая.

На рисунке 6 представлен последний такт работы автомата, в котором производится вычитание единицы, добавленной в первом такте. Формируется ячейка-ответ в состоянии R^* . Рассмотрены 4 случая: $S < A$, $S = A$, $S = A + 1$, $S > A + 1$, где A и S — первое и второе слагаемые соответственно.

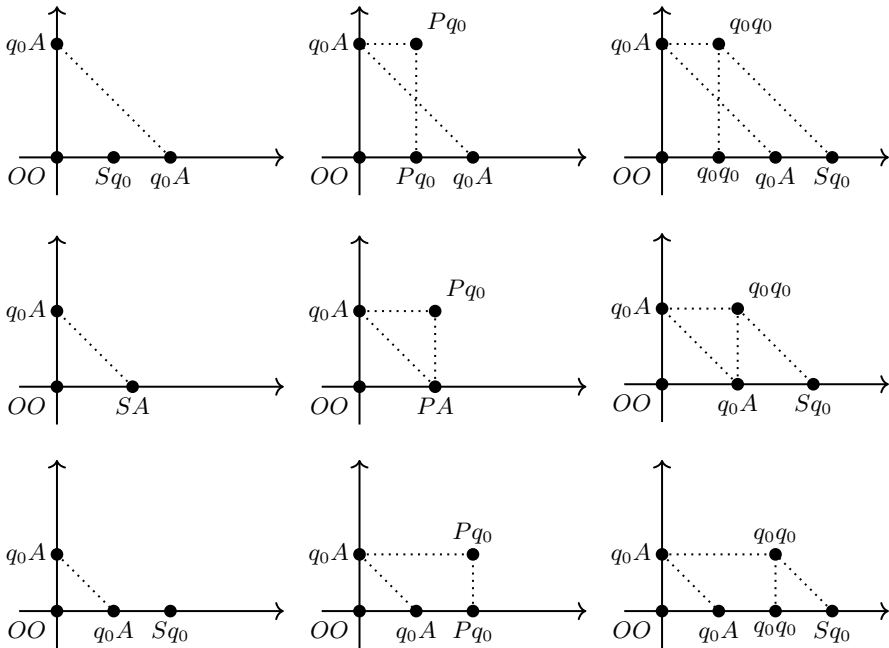


Рис. 4: Поведение автомата σ_{ct} при «1» во второй компоненте эфира

Получив значение «1» во второй компоненте эфира, автомат за два такта выполняет суммирование, где ячейка в состоянии S^* — первое сла-

гаемое, ячейка в состоянии $*A$ — второе слагаемое, результат сохраняется в ячейке с состоянием $S*$.

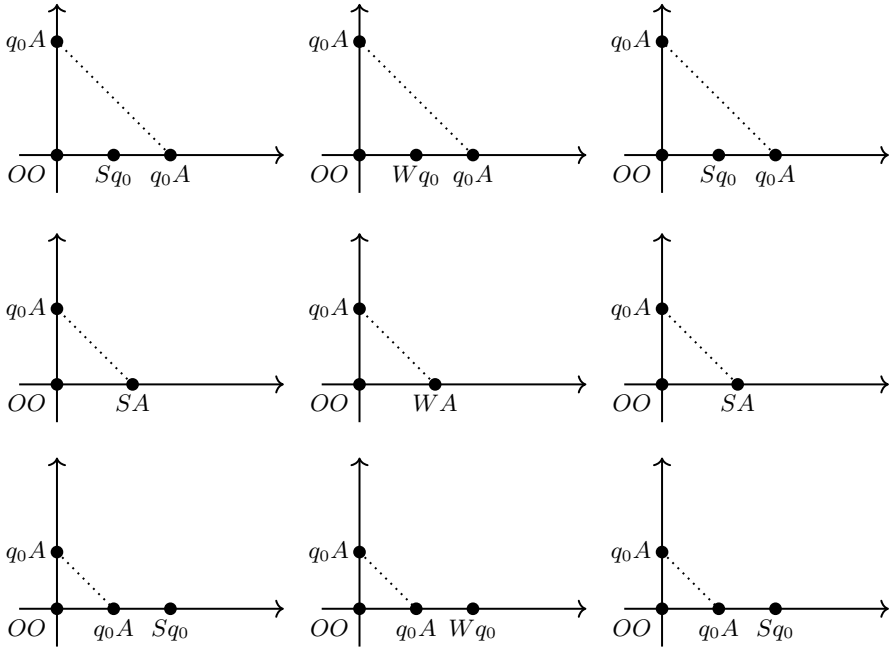


Рис. 5: Поведение автомата σ_{ct} при «0» во второй компоненте эфира

Получив значение «0» во второй компоненте эфира, автомат суммирования не производит — ячейка в состоянии $S*$ остаётся на своём месте. Для унификации с поведением при «1» во второй компоненте эфира автомат работает те же 2 такта.

Получив значение «3» во второй компоненте эфира, автомат формирует ответ в состоянии $R*$. Производится вычитание искусственно добавленной в нулевом такте единицы.

6.5. Управляющий автомат

Для формирования последовательности 1010... построим автомат σ_m . Последовательность 1010... будет передаваться в эфир ячейкой с координатами $(0, 0)$, находящейся попеременно в состояниях O_0 и O_1 . В начальный момент времени ячейка $(0, 0)$ находится в состоянии O_1 , остальные ячейки находятся в состоянии O .

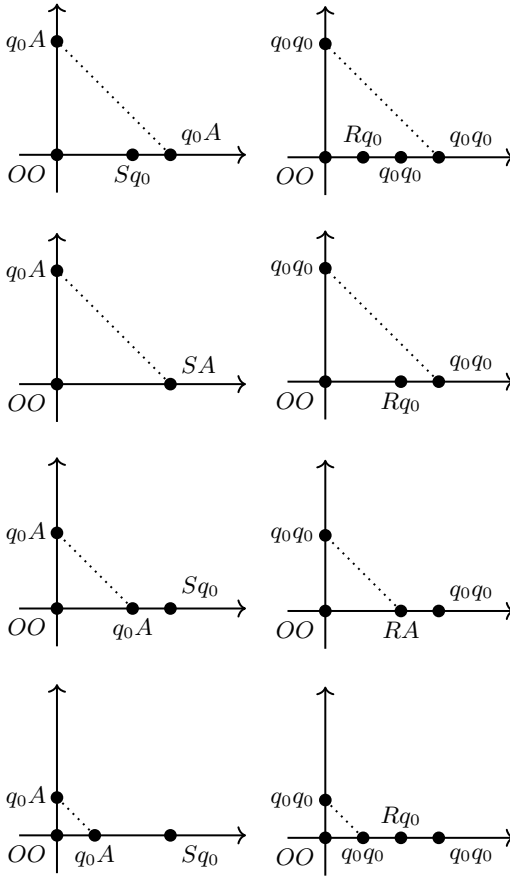


Рис. 6: Поведение автомата σ_{ct} при «3» во второй компоненте эфира

$\sigma_m = (\mathbb{Z}^2, Q_m, V_m, G_m, +_m, L_m, \varphi_m, \psi_m)$, где: $Q_m = \{O, O_0, O_1\}$; $V_m = \emptyset$; $G_m = \{0, 1\}$; $+_m = \max$; $L_m = \{\Omega\}$;

$$\begin{cases} \varphi_m = O & \text{если } x_0 = O; \\ \varphi_m = O_1 & \text{если } x_0 = O_0; \\ \varphi_m = O_0 & \text{если } x_0 = O_1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \psi_m = 0 & \text{если } x_0 \in \{O, O_0\}; \\ \psi_m = 1 & \text{если } x_0 = O_1. \end{cases}$$

6.6. Система клеточных автоматов с локаторами

Итак, перейдём к рассмотрению функционирования системы автоматов, заданной формулой

$$\mu = B(S(\sigma_{ct}, 2, \sigma_{x2}, 1), 2, B(C(\sigma_{12}), 0, \sigma_m, 1), 3)$$

Пусть a — натуральное число, $(a_n, a_{n-1}, \dots, a_1)$ — двоичное представление числа a . В такты с первого по n -ый автомат σ_{12} выдаёт в эфир сигнал «0», если $a_i = 0$, и сигнал «1», если $a_i = 1$, $i \in \mathbb{N}$. Автомат $B(C(\sigma_{12}), 0, \sigma_m, 1)$ формирует новое значение a_i только в нечётные такты. В последующие чётные такты в эфир выдаётся то же самое значение a_i .

В таблице 2 представлено функционирование $B(C(\sigma_{12}), 0, \sigma_m, 1)$ для перевода в двоичное представление числа 5.

Рассмотрим работу системы μ на примере умножения $3 \cdot 5$. В таблице 3 представлено функционирование системы μ .

Список литературы

- [1] Гасанов Э. Э., “Клеточные автоматы с локаторами”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **24:2** (2020), 119–132.
- [2] Гасанов Э. Э., Хайбуллин Б. Ф., “Быстрые алгоритмы умножения и деления натуральных чисел с помощью клеточных автоматов с локаторами”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **28:3** (2024), 103–130.
- [3] Гасанов Э. Э., “Клеточные автоматы с локаторами как модель устройств с беспроводной связью”, *Математические вопросы кибернетики*, **21** (2023), 5–51. DOI: 10.20948/mvk-2023-5.
- [4] Васильев Д. И., “Поиск ближайшего соседа на прямой с помощью клеточного автомата с локаторами”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **24:3** (2020), 99–119.
- [5] Калачев Г. В., “Замечания к определению клеточного автомата с локаторами”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **24:4** (2020), 47–56.

Статья поступила 27 мая 2026 г.

Operations on cellular automata with locators

A. V. Diubanov

t		$B(C(\sigma_{12}), 0, \sigma_m, 1)$						σ_m
		(0,0)	(1,0)	(2,0)	(3,0)	(4,0)	(5,0)	(0,0)
0	Q	O	1	1	1	1	1	O_1
	S	(0,0,2)	(1,1,0)	(1,1,0)	(1,1,0)	(1,1,0)	(1,1,0)	1
	E	(1,1,0)	(0,1,0)	(1,1,0)	(0,1,0)	(1,1,0)	(0,0,0)	0
1	Q	O_1	0	1	0	1	0	O_0
	S	(0,0,1)	(0,0,0)	(1,1,0)	(0,0,0)	(1,1,0)	(0,0,0)	0
	E	(0,1,0)	(0,1,0)	(1,1,0)	(1,1,0)	(0,0,0)	(0,0,0)	0
2	Q	O_1	0	1	0	1	0	O_1
	S	(0,0,1)	(0,0,0)	(1,1,0)	(0,0,0)	(1,1,0)	(0,0,0)	1
	E	(0,1,0)	(0,1,0)	(1,1,0)	(1,1,0)	(0,0,0)	(0,0,0)	0
3	Q	O_1	0	1	0	0	0	O_0
	S	(0,0,0)	(0,0,0)	(1,1,0)	(0,0,0)	(0,0,0)	(0,0,0)	0
	E	(1,1,0)	(1,1,0)	(0,0,0)	(0,0,0)	(0,0,0)	(0,0,0)	0
4	Q	O_1	0	1	0	0	0	O_1
	S	(0,0,0)	(0,0,0)	(1,1,0)	(0,0,0)	(0,0,0)	(0,0,0)	1
	E	(1,1,0)	(1,1,0)	(0,0,0)	(0,0,0)	(0,0,0)	(0,0,0)	0
5	Q	O_1	0	0	0	0	0	O_0
	S	(0,0,1)	(0,0,0)	(0,0,0)	(0,0,0)	(0,0,0)	(0,0,0)	0
	E	(0,0,0)	(0,0,0)	(0,0,0)	(0,0,0)	(0,0,0)	(0,0,0)	0
6	Q	O_1	0	0	0	0	0	O_1
	S	(0,0,1)	(0,0,0)	(0,0,0)	(0,0,0)	(0,0,0)	(0,0,0)	1
	E	(0,0,0)	(0,0,0)	(0,0,0)	(0,0,0)	(0,0,0)	(0,0,0)	0
7	Q	O_1	0	0	0	0	0	O_0
	S	(0,0,3)	(0,0,0)	(0,0,0)	(0,0,0)	(0,0,0)	(0,0,0)	0
	E	(0,0,0)	(0,0,0)	(0,0,0)	(0,0,0)	(0,0,0)	(0,0,0)	0
8	Q	O_1	0	0	0	0	0	O_1
	S	(0,0,3)	(0,0,0)	(0,0,0)	(0,0,0)	(0,0,0)	(0,0,0)	1
	E	(0,0,0)	(0,0,0)	(0,0,0)	(0,0,0)	(0,0,0)	(0,0,0)	0

Таблица 2: Пример функционирования системы $B(C(\sigma_{12}), 0, \sigma_m, 1)$

$\mu = B(S(\sigma_{ct}, 2, \sigma_{x2}, 1), 2, B(C(\sigma_{12}), 0, \sigma_m, 1), 3)$									
Такт	0	1	2	3	4	5	6	7	8
σ_m	1	0	1	0	1	0	1	0	1
σ_{x2}	3	3	6	6	12	12	24	24	48
σ_{12}	2	1	1	0	0	1	1	3	3
σ_{ct}	S*(1,0) *A(3,0) *A(0,3)	S*(1,0) *A(3,0) *A(0,3)	P*(1,0) P*(1,3) *A(0,6) *A(6,0)	S*(4,0) *A(6,0) *A(0,6)	W*(4,0) *A(12,0) *A(0,12)	S*(4,0) *A(12,0) *A(0,12)	P*(4,0) P*(4,12) *A(0,24) *A(24,0)	S*(16,0) *A(24,0) *A(0,24)	R*(15,0) *A(48,0) *A(0,48)

Таблица 3: Пример функционирования системы автоматов μ

In this paper, operations on cellular automata with locators are proposed. These operations allow us to describe some cellular automaton with locators in the form of formulas over other cellular automaton with locators. As an example, a formula is constructed that defines a cellular automaton with locators equivalent to a cellular automaton with locators that performs multiplication of natural numbers in $2n + 2$ cycles.

Keywords: cellular automata with locators, superposition, formula.

References

- [1] Gasanov E. E., “Cellular automata with locators”, *Intelligent Systems. Theory and Applications*, **24**:2 (2020), 119–132 (In Russian).
- [2] Gasanov E. E., Khaybullin B. F., “Fast algorithms for multiplication and division of natural numbers using cellular automata with locators”, *Intelligent Systems. Theory and Applications*, **28**:3 (2024), 103–130 (In Russian).
- [3] Gasanov E. E., “Cellular automata with locators”, *Mathematical Problems of Cybernetics*, **21** (2023), 5–51. DOI: 10.20948/mvk-2023-5 (In Russian).
- [4] Vasilyev D. I., “The closest neighbour problem solution using the cellular automata with locators model”, *Intelligent Systems. Theory and Applications*, **24**:3 (2020), 99–119 (In Russian).
- [5] Kalachev G. V., “Remarks on the Definition of Cellular Automaton with Locators”, *Intelligent Systems. Theory and Applications*, **24**:4 (2020), 47–56 (In Russian).

Received on May 27, 2026