

О вычислительной сложности задачи существования предельных циклов в булевых сетях с ограничениями из решётки Поста

А. С. Дробышев*

В статье исследуется вычислительная сложность задачи существования предельных циклов фиксированной длины k в булевых сетях с локальными функциями, ограниченными классами из решётки Поста. Доказано, что задача является NP-полной для выразительных классов D_2 (монотонные самодвойственные функции), F_6^∞ и F_2^∞ , а для класса линейных функций L_1 полиномиально разрешима. Получены явные полиномиальные редукции из задачи 3-SAT с сохранением предельных циклов длины k .

Ключевые слова: булевы сети, предельные циклы, решётка Поста, вычислительная сложность, NP-полнота.

1. Введение

Булевой сетью называется дискретная динамическая система, в которой элементы, содержащие булевы функции, взаимодействуют между собой на дискретных временных шагах. Такая сеть может быть описана в виде набора булевых функций, каждая из которых определяет дискретную временную эволюцию отдельного элемента. Булеву сеть обычно представляют ориентированным графом взаимодействия. Поскольку булева сеть состоит из конечного числа элементов, общее число возможных конфигураций конечно. Следовательно, траектория любой начальной конфигурации рано или поздно попадает либо в предельный цикл, либо в неподвижную точку. Существенным аспектом булевых сетей является схема обновления, определяющая порядок обновления вершин графа взаимодействия. Основными типами схем обновления являются параллельная, последовательная, блочно-параллельная и блочно-последовательная,

* *Дробышев Александр Сергеевич* — аспирант каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: drobyshev.sanya@yandex.ru, ORCID: 0009-0002-8881-8730.

Drobyshev Alexander Sergeevich — graduate student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intelligent Systems.

каждая из которых существенно влияет на динамическую траекторию системы.

Исторически булевы модели дискретной динамики восходят к логическим моделям нейронной активности Маккаллока и Питтса [4] и к моделям нейронных сетей Хопфилда [16]. В дальнейшем близкие дискретные модели активно использовались для описания генетических регуляторных сетей: ранние работы Кауффмана и Томаса показали, что булевы представления позволяют изучать устойчивые состояния и периодическое поведение биологических регуляторных систем [11–13]. Современные работы также используют дискретные и логические модели для анализа осцилляций в регуляторных сетях и молекулярных часах [9, 10].

Исследования булевых сетей можно классифицировать на два направления. Первое направление изучает структурные и алгебраические свойства динамики и графов взаимодействия. Сюда относятся результаты о влиянии структуры графа на существование и длины предельных циклов [5, 6], о поведении нейронных и хопфилдовских сетей с несколькими устойчивыми состояниями или предельными циклами [7, 8], а также работы, связывающие неподвижные точки булевых сетей с редукциями, графовой энтропией, задачами угадывания и сетевым кодированием [3, 14, 15].

Второе направление связано с вычислительной сложностью задач, возникающих при анализе динамики булевых сетей. Уже для произвольных булевых сетей задача обнаружения предельного цикла заданной длины оказывается вычислительно трудной: в работе [1] показано, что для любого фиксированного $k \geq 2$ соответствующая задача является NP-полной при основных схемах обновления, включая параллельную, последовательную и блочно-последовательную.

В работе [2] рассматривается подкласс булевых сетей — конъюнктивные сети, где каждая локальная функция определяется конъюнкцией над подмножеством компонентов сети, связанных с её вершиной. В частности, для конъюнктивных булевых сетей с параллельной схемой обновления установлена NP-полнота задачи существования предельного цикла длины k в случае, когда k является входным параметром. Вопрос о вычислительной сложности этой задачи при фиксированном k в указанной работе оставлен открытым. Кроме того, показано, что композиция конъюнктивных функций, являющаяся центральной операцией при анализе многошаговой эволюции сети, вычисляется за полиномиальное время. Этот результат позволяет свести анализ итераций конъюнктивной сети к задаче достижимости в графе взаимодействия.

В настоящей работе рассматривается задача существования предельного цикла заданной длины k при параллельной схеме обновления. Для

фиксированного класса булевых функций \mathcal{F} мы обозначаем эту задачу через $k\text{-PLCE}(\mathcal{F})$: на вход подаётся булева сеть, все локальные функции которой принадлежат замыканию класса \mathcal{F} , и требуется определить, существует ли в этой сети предельный цикл длины ровно k . Цель данной статьи — исследовать сложность задачи $k\text{-PLCE}(\mathcal{F})$ для классов булевых функций из решётки Поста. Основное внимание уделяется случаю фиксированного $k \geq 2$. Для $k = 1$ задача сводится к задаче существования неподвижной точки, которая изучалась ранее. Основные результаты работы состоят в следующем. Для фиксированного $k \geq 2$ доказана NP-полнота задачи $k\text{-PLCE}(\mathcal{F})$ для классов D_2 , F_6^∞ и F_2^∞ . Кроме того, показано, что для класса линейных функций L_1 задача решается за полиномиальное время. В совокупности с монотонностью задачи по включению классов функций эти результаты дают частичную классификацию сложности по решётке Поста. Открытыми остаются случаи конъюнктивных и дизъюнктивных классов.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 вводятся основные определения: булевы сети, схемы обновления, предельные циклы и задача $k\text{-PLCE}$. Раздел 3 посвящён ранее известным результатам. В разделе 4 формулируются основные результаты. В разделе 5 приводятся доказательства NP-полноты и полиномиальный алгоритм для линейного случая. В заключении обсуждаются оставшиеся открытые случаи.

2. Определения

Обозначим $[n] = \{1, \dots, n\}$. Рассмотрим n булевых функций f_1, \dots, f_n , где $f_i : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$.

Определение. *Булевой сетью* будем называть систему булевых функций f_1, \dots, f_n , определяемую отображением

$$f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^n,$$

где $f = (f_1, \dots, f_n)$.

Чтобы связать функциональное описание сети с её структурой, уточним понятие графа взаимодействия по аналогии с работой [1].

Определение. *Ориентированным графом взаимодействия* булевой сети f называется граф

$$G_f = (V, A),$$

где $V = [n]$, а

$$(i, j) \in A \iff \text{функция } f_j \text{ существенно зависит от переменной } x_i.$$

Далее нам понадобится язык для описания состояний системы и их эволюции.

Определение. *Пространством конфигураций* будем называть множество $\{0, 1\}^n$.

Пусть f — булева сеть, $x \in \{0, 1\}^n$ — конфигурация, $I \subseteq [n]$. *Частичным обновлением по множеству I* будем называть отображение $f^{(I)}$, заданное равенствами

$$f^{(I)}(x)_i = \begin{cases} f_i(x), & \text{если } i \in I, \\ x_i, & \text{если } i \notin I. \end{cases}$$

Теперь зафиксируем общий шаблон обновления блоками, который объединяет параллельный и последовательный случаи.

Определение. Пусть $W = (W_1, \dots, W_t)$ — упорядоченное разбиение множества $[n]$. *Булевой сетью с обновлением по схеме W* будем называть динамическую систему, реализующую отображение

$$f^{(W)} = f^{(W_t)} \circ \dots \circ f^{(W_2)} \circ f^{(W_1)}.$$

Если $W = ([n])$, то получаем синхронную (параллельную) схему обновления.

Имея механизм эволюции, перейдём к базовым аттракторам — неподвижным точкам и циклам.

Определение. Конфигурация $x \in \{0, 1\}^n$ называется *неподвижной точкой*, если

$$f^{(W)}(x) = x.$$

Определение. Конфигурация $x \in \{0, 1\}^n$ принадлежит *предельному циклу длины k* , если

$$(f^{(W)})^k(x) = x,$$

и для любого $l \in \{1, \dots, k-1\}$ выполняется

$$(f^{(W)})^l(x) \neq x.$$

Для удобства изложения введём обозначение для множества всех конфигураций, принадлежащих предельным циклам длины ровно k , то есть таких конфигураций, которые возвращаются в исходное состояние после k применений отображения $f^{(W)}$, но не возвращаются к нему после меньшего числа шагов.

Определение. Положим

$$\Phi_k(f^{(W)}) = \left\{ x \in \{0, 1\}^n \mid (f^{(W)})^k(x) = x \text{ и} \right. \\ \left. \forall l \in \{1, \dots, k-1\}, (f^{(W)})^l(x) \neq x \right\}. \quad (1)$$

Определим

$$\phi_k(f^{(W)}) = \frac{|\Phi_k(f^{(W)})|}{k},$$

то есть $\phi_k(f^{(W)})$ равно числу предельных циклов длины k .

Переходим к постановке основной вычислительной задачи и фиксации классов функций, на которых она исследуется.

Определение. Пусть \mathcal{F} — множество булевых функций. *Замыканием* множества \mathcal{F} относительно операций суперпозиции и введения фиктивных переменных будем называть множество $[\mathcal{F}]$.

Задача k-PLCE(\mathcal{F}). Существование предельного цикла в булевой сети с параллельной схемой обновления для \mathcal{F} , где $k \geq 1$ — фиксированное натуральное число.

Вход: булева сеть $f = (f_1, \dots, f_n)$ такая, что $f_i \in [\mathcal{F}]$ для всех $i \in [n]$.

Вопрос: верно ли, что $\Phi_k(f) \neq \emptyset$?

В настоящей статье доказываются результаты о вычислительной сложности задачи k-PLCE(\mathcal{F}), где \mathcal{F} — один из классов решётки Поста.

Для доказательства основных результатов используются полиномиальные редукции из задачи 3-выполнимости.

Определение. Пусть ψ — булева формула на переменных $\{x_1, \dots, x_n\}$,

$$v : \{x_1, \dots, x_s\} \rightarrow \{0, 1\}, \quad s \in [n],$$

— частичное присваивание. Через $\psi[v]$ обозначим *результат подстановки* в формулу ψ :

$$\psi[x_1 \leftarrow v(x_1), \dots, x_s \leftarrow v(x_s)].$$

Задача 3-SAT (3-выполнимость).

Вход: формула в 3-КНФ ψ на переменных $\{x_1, \dots, x_n\}$.

Вопрос: существует ли присваивание $v : \{x_1, \dots, x_n\} \rightarrow \{0, 1\}$ такое, что $\psi(v) = 1$?

Определение. Пусть f — булева сеть с множеством вершин $V = [n]$, и пусть $z \in \{0, 1\}^n$ — конфигурация. Для вершины $v \in V$ координата z_v называется *значением вершины v* в конфигурации z . Если

$$z^{(0)}, z^{(1)}, z^{(2)}, \dots$$

— траектория сети, то $z_v^{(t)}$ обозначает значение вершины v в момент времени t .

3. Известные ранее результаты

Задачи о предельных циклах булевых сетей ранее изучались для различных схем обновления и различных ограничений на локальные функции.

В работе [1] доказано, что задача определения того, допускает ли булева сеть предельный цикл длины k , является NP-полной для любого фиксированного k . Этот результат справедлив для основных схем обновления, включая параллельную, последовательную и блочно-последовательную схемы.

Для конъюнктивных булевых сетей близкие результаты получены в работе [2]. В частности, для последовательной и блочно-последовательной схем обновления NP-полнота установлена при $k > 2$, а для параллельной схемы обновления — в случае, когда k является частью входа.

В настоящей работе рассматривается другая постановка: число $k \geq 2$ фиксировано заранее, а локальные функции булевой сети ограничены классами из решётки Поста.

4. Основные результаты

Далее нас будут интересовать булевы сети, локальные функции которых ограничены определёнными классами решётки Поста [18]. Напомним используемые далее обозначения:

- F_6^∞ — класс функций, порождаемых базисом $\{x \cdot (y \vee z)\}$;
- F_2^∞ — класс функций, порождаемых базисом $\{x \vee y \cdot z\}$;
- D_2 — класс всех монотонных самодвойственных функций с базисом $\{x \cdot y \vee y \cdot z \vee x \cdot z\}$;
- L_1 — класс всех линейных функций с базисом $\{1, x \oplus y\}$.

Сначала зафиксируем простое свойство монотонности задачи по классу локальных функций.

Лемма 1. Пусть \mathcal{F}_1 и \mathcal{F}_2 — множества булевых функций, причём $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$. Тогда $k\text{-PLCE}(\mathcal{F}_1) \leq_P k\text{-PLCE}(\mathcal{F}_2)$.

Случай $k = 1$. Для $k = 1$ задача $k\text{-PLCE}$ вырождается в задачу существования неподвижной точки.

Определение. Задачей $1\text{-FPE}(\mathcal{F})$ (Fixed Point Existence) будем называть следующую задачу:

- *Вход:* булева сеть $f = (f_1, \dots, f_n)$ такая, что $f_i \in [\mathcal{F}]$ для всех $i \in [n]$;
- *Вопрос:* существует ли неподвижная точка, то есть конфигурация $x \in \{0, 1\}^n$ такая, что $f(x) = x$?

Очевидно, что $1\text{-FPE}(\mathcal{F})$ эквивалентна задаче $1\text{-PLCE}(\mathcal{F})$.

Для общих булевых сетей (без функциональных ограничений) задача существования неподвижной точки уже является NP-полной; кроме того, известны полные дихотомии по классам функций и графов взаимодействия [17]. Следуя [17], рассмотрим пару $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$, где \mathcal{F} — постовский класс булевых функций, а \mathcal{G} — минорно-замкнутый класс ориентированных графов.

В настоящей работе мы рассматриваем класс графов \mathcal{G}^{all} всех ориентированных графов взаимодействия. Он, очевидно, является минорно-замкнутым и, в частности, содержит все планарные графы (а также все графы с вершинным покрытием мощности 1). Поэтому к паре $(\mathcal{F}, \mathcal{G}^{\text{all}})$ применима дихотомия Косуба для задачи существования неподвижной точки $\text{FixedPoints}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ [17]: $\text{FixedPoints}(\mathcal{F}, \mathcal{G}^{\text{all}})$ (и, следовательно, $1\text{-PLCE}(\mathcal{F})$) NP-полна тогда и только тогда, когда \mathcal{F} содержит клон всех самодвойственных функций D_1 ; во всех остальных постовских классах \mathcal{F} эта задача решается за полиномиальное время.

Отметим также, что для монотонных классов Поста D_2 , F_6^∞ и F_2^∞ глобальное отображение $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^n$ монотонно по покомпонентному порядку. Поскольку $\{0, 1\}^n$ является конечной полной решёткой, по теореме Кнастера–Тарского любая такая сеть имеет неподвижную точку, причём её можно найти за полиномиальное время. Следовательно, задача $1\text{-FPE}(\mathcal{F})$ для классов $\mathcal{F} \in \{D_2, F_6^\infty, F_2^\infty\}$ принадлежит классу P. Аналогично, для линейного класса L_1 задача существования неподвижной точки также полиномиально разрешима с помощью решения системы линейных уравнений над полем \mathbb{F}_2 .

В дальнейшем мы будем фокусироваться на классификации сложности задачи $k\text{-PLCE}$ для фиксированных $k \geq 2$.

Случай $k \geq 2$. Следующие результаты получены явными полиномиальными редукциями из задачи 3-SAT и показывают, что даже при сильных функциональных ограничениях задача существования предельных циклов длины больше единицы может оставаться NP-полной.

Лемма 2. Пусть фиксировано целое число $k \geq 2$. Тогда задача k -PLCE(D_2) является NP-полной.

Лемма 3. Пусть фиксировано целое число $k \geq 2$. Тогда задача k -PLCE(F_6^∞) является NP-полной.

Лемма 4. Пусть фиксировано целое число $k \geq 2$. Тогда задача k -PLCE(F_2^∞) является NP-полной.

В отличие от NP-полных случаев, для линейного класса L_1 задача k -PLCE оказывается полиномиально разрешимой благодаря алгебраической структуре линейных сетей.

Лемма 5. Пусть фиксировано целое число $k \geq 2$. Тогда задача k -PLCE(L_1) принадлежит классу P.

Полученные результаты для рассматриваемых классов Поста суммированы на рис. 1.

5. Доказательства

В настоящем разделе изложены доказательства основных результатов о вычислительной сложности задачи k -PLCE для булевых сетей с локальными функциями, ограниченными классами Поста.

Для установления NP-трудности используются явные полиномиальные редукции из задачи 3-выполнимости.

Принадлежность рассматриваемых задач классу NP отдельно не доказывается: она следует из стандартной полиномиальной проверки сертификата — конфигурации, принадлежащей предельному циклу длины k , — и уже установлена для общей задачи k -PLCE в работе [1].

Для линейного случая используется алгебраический анализ композиций функций и решение систем линейных уравнений над полем \mathbb{F}_2 .

Структура раздела следует леммам 1–5, каждая из которых касается вычислительной сложности для отдельного класса функций.

Соглашение о кратных дугах. Во всех последующих конструкциях выражения вида «проведём t дуг из вершины u в вершину v » или «добавим t петель у вершины v » используются лишь как сокращённое описание локальной функции вершины v .

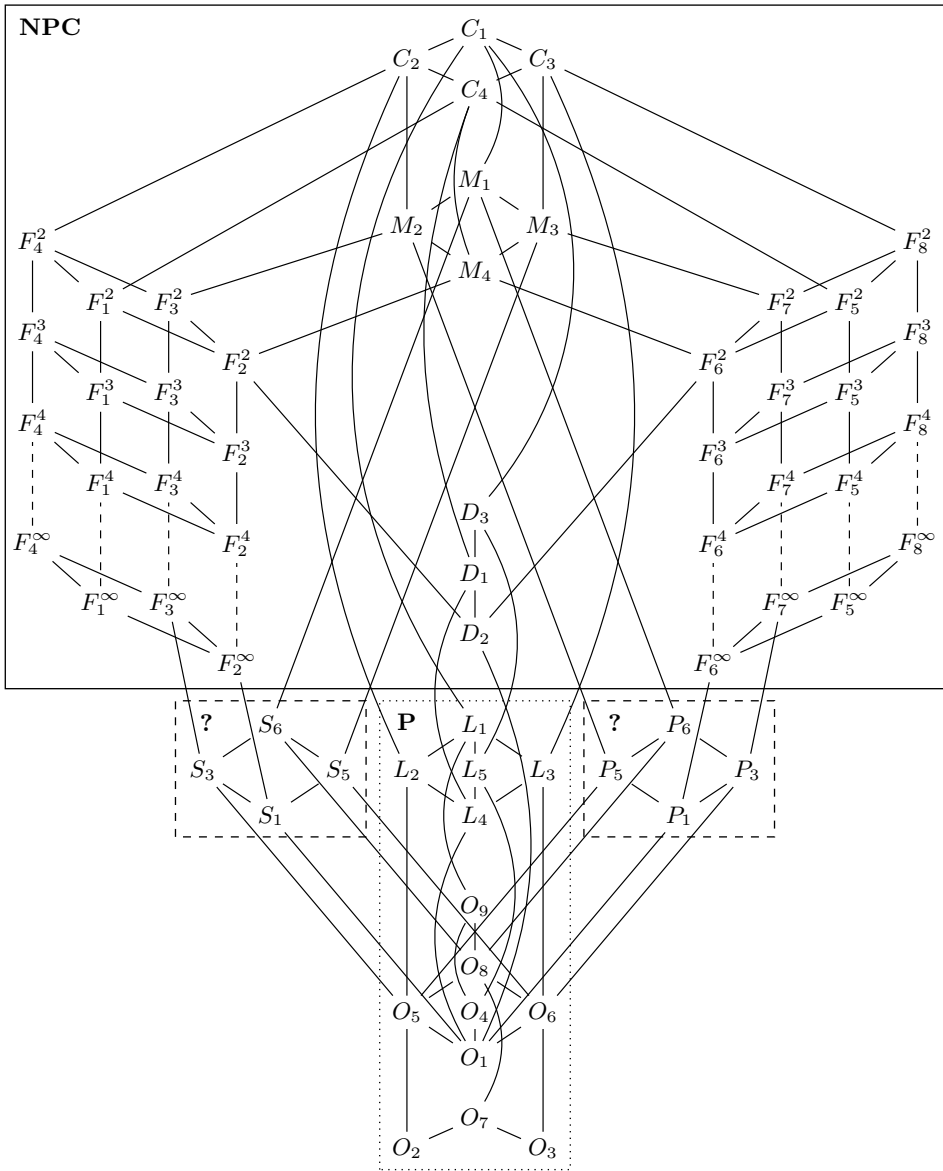


Рис. 1: Вычислительная сложность задачи $k\text{-PLCE}(F)$ для классов Поста

А именно, если при описании конструкции некоторая вершина u должна входить в локальную функцию вершины v с кратностью t , то это означает, что соответствующая переменная подставляется в выбранную базовую функцию t раз. Например, запись о двух петлях в вершине v означает, что переменная x_v участвует в локальной функции вершины v дважды.

Формально все рассматриваемые далее сети являются обычными булевыми сетями без кратных дуг. Для каждой вершины v локальная функция задаётся как булева функция от попарно различных переменных, получающаяся из указанной схемы путём отождествления одинаковых аргументов. Поскольку рассматриваемые классы функций замкнуты относительно суперпозиции и отождествления переменных, такая запись не выводит локальные функции за пределы соответствующего класса.

Таким образом, кратность дуг служит только для компактного описания того, с какими весами соответствующие переменные участвуют в локальной функции; граф взаимодействия при этом понимается в обычном смысле, то есть без кратных дуг. В частности, дополнительные вершины в конструкцию не вводятся, и пространство состояний сети определяется только исходными вершинами конструкции.

Доказательство леммы 1. Поскольку $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$, имеем $[\mathcal{F}_1] \subseteq [\mathcal{F}_2]$. Действительно, класс $[\mathcal{F}_1]$ получается из функций множества \mathcal{F}_1 применением операций суперпозиции и введения фиктивных переменных; те же построения допустимы и для множества \mathcal{F}_2 .

Рассмотрим отображение

$$R: \text{Inst}(\text{k-PLCE}(\mathcal{F}_1)) \rightarrow \text{Inst}(\text{k-PLCE}(\mathcal{F}_2)), \quad R(f) = f,$$

где $\text{Inst}(\cdot)$ обозначает множество экземпляров соответствующей задачи.

Корректность определения R следует из включения $[\mathcal{F}_1] \subseteq [\mathcal{F}_2]$: если $f = (f_1, \dots, f_n)$ является экземпляром задачи $\text{k-PLCE}(\mathcal{F}_1)$, то $f_i \in [\mathcal{F}_1]$ для всех $i \in [n]$, а значит, $f_i \in [\mathcal{F}_2]$ для всех $i \in [n]$. Следовательно, f является также экземпляром задачи $\text{k-PLCE}(\mathcal{F}_2)$.

Кроме того, для любого экземпляра f выполнено

$$f \in \text{k-PLCE}(\mathcal{F}_1) \iff R(f) = f \in \text{k-PLCE}(\mathcal{F}_2),$$

поскольку вопрос о существовании предельного цикла длины k формулируется для одной и той же булевой сети.

Наконец, отображение R вычисляется за линейное время, так как является тождественным. Следовательно,

$$\text{k-PLCE}(\mathcal{F}_1) \leq_P \text{k-PLCE}(\mathcal{F}_2).$$

□

Теперь рассмотрим вычислительную сложность задачи k-PLCE для сетей, ограниченных классом Поста D_2 . Построение сети \mathcal{N}_ψ для этого случая схематически изображено на рис. 2.

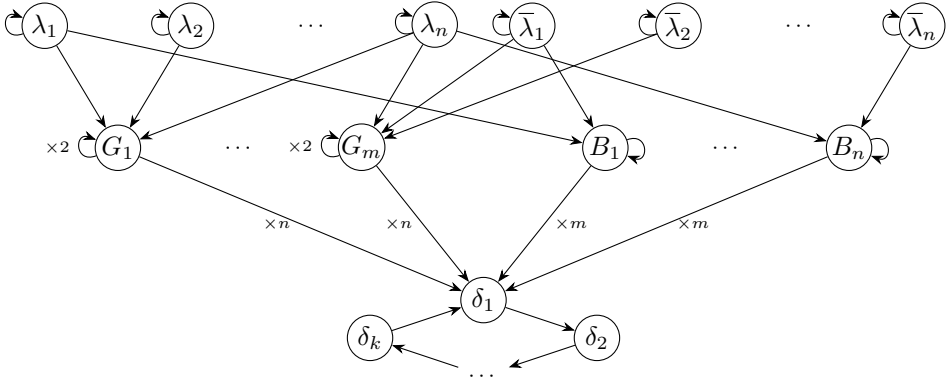


Рис. 2: Граф для случая D_2

Доказательство леммы 2. Принадлежность задачи k-PLCE(D_2) классу NP следует из общей принадлежности задачи k-PLCE классу NP, установленной в работе [1].

Докажем NP-трудность полиномиальной редукцией из задачи 3-SAT. Пусть дана формула

$$\psi = C_1 \wedge \dots \wedge C_m$$

в 3-КНФ на переменных y_1, \dots, y_n , где каждый дизъюнкт

$$C_j = (\ell_{j1} \vee \ell_{j2} \vee \ell_{j3})$$

состоит из трёх литералов, и каждый литерал ℓ_{jr} равен либо y_i , либо $\neg y_i$ для некоторого $i \in [n]$.

Предварительное упрощение. Без ограничения общности можно считать, что $\gcd(n, m) = 1$. Действительно, если $\gcd(n, m) \neq 1$, то достаточно заменить формулу ψ на эквивалентную формулу, полученную добавлением нескольких копий одного и того же дизъюнкта. Это не меняет выполнимости формулы. При этом число переменных остаётся равным n , а число дизъюнктов становится равным $m + r$, где $r \in \{1, \dots, n\}$. Среди чисел $m + 1, \dots, m + n$ найдётся число, взаимно простое с n , поэтому для подходящего r получаем $\gcd(n, m + r) = 1$. Такое преобразование

выполняется за полиномиальное время. Для простоты обозначений далее снова будем писать t для числа дизъюнктов после этой замены.

Построение сети \mathcal{N}_ψ . Построим по формуле ψ булеву сеть \mathcal{N}_ψ с параллельной схемой обновления.

1. *Слой литералов.* Для каждого $i \in [n]$ вводятся две вершины λ_i и $\bar{\lambda}_i$, соответствующие литералам y_i и $\neg y_i$. В каждой из этих вершин имеется одна петля, а локальная функция равна тождеству:

$$f_{\lambda_i}(z) = z_{\lambda_i}, \quad f_{\bar{\lambda}_i}(z) = z_{\bar{\lambda}_i}.$$

Следовательно, значения вершин λ_i и $\bar{\lambda}_i$ не изменяются вдоль любой траектории.

2. *Слой дизъюнктов и переменных.* Для каждого $j \in [m]$ вводится вершина G_j , а для каждого $i \in [n]$ вводится вершина B_i .

Если литерал y_i входит в дизъюнкт C_j , то проводится дуга $\lambda_i \rightarrow G_j$; если в C_j входит литерал $\neg y_i$, то проводится дуга $\bar{\lambda}_i \rightarrow G_j$. Кроме того, в каждой вершине G_j имеются две петли.

В вершину B_i проводятся дуги из λ_i и $\bar{\lambda}_i$, и в B_i имеется одна петля.

Локальная функция в каждой вершине G_j и B_i есть мажоритарная функция от всех её входов. Поскольку мажоритарная функция от нечётного числа аргументов является монотонной и самодвойственной, все эти функции принадлежат классу D_2 .

3. *Слой цикла.* Вводятся вершины $\delta_1, \dots, \delta_k$, образующие ориентированный цикл длины k :

$$\delta_1 \rightarrow \delta_2 \rightarrow \dots \rightarrow \delta_k \rightarrow \delta_1.$$

Для $r = 2, \dots, k$ положим

$$f_{\delta_r}(z) = z_{\delta_{r-1}}.$$

Из каждой вершины G_j проводится n дуг в вершину δ_1 , а из каждой вершины B_i проводится t дуг в вершину δ_1 . Согласно соглашению о кратных дугах, это означает, что значение каждой вершины G_j входит в локальную функцию вершины δ_1 ровно n раз, а значение каждой вершины B_i входит в неё ровно t раз.

Локальная функция в вершине δ_1 есть мажоритарная функция от всех её входов, то есть от значения δ_k , от n копий каждого значения G_1, \dots, G_m и от t копий каждого значения B_1, \dots, B_n .

Таким образом, все локальные функции сети \mathcal{N}_ψ принадлежат классу D_2 . Построение сети выполняется за полиномиальное время.

Корректность редукции.

(1) Если формула ψ выполнима, то сеть \mathcal{N}_ψ имеет предельный цикл длины k .

Пусть

$$a : \{y_1, \dots, y_n\} \rightarrow \{0, 1\}$$

— удовлетворяющее присваивание формулы ψ . Рассмотрим конфигурацию $z^{(0)}$, определённую равенствами

$$z_{\lambda_i}^{(0)} = a(y_i), \quad z_{\bar{\lambda}_i}^{(0)} = 1 - a(y_i), \quad i \in [n],$$

$$z_{G_j}^{(0)} = 1, \quad j \in [m],$$

$$z_{B_i}^{(0)} = 0, \quad i \in [n],$$

$$z_{\delta_1}^{(0)} = 1, \quad z_{\delta_2}^{(0)} = \dots = z_{\delta_k}^{(0)} = 0.$$

Покажем, что под действием глобального отображения f значения всех вершин $\lambda_i, \bar{\lambda}_i, G_j, B_i$ сохраняются.

Для вершин $\lambda_i, \bar{\lambda}_i$ это очевидно из определения:

$$f_{\lambda_i}(z) = z_{\lambda_i}, \quad f_{\bar{\lambda}_i}(z) = z_{\bar{\lambda}_i}.$$

Рассмотрим теперь вершину G_j . Её входами являются три значения, соответствующие литералам дизъюнкта C_j , и два раза её собственное значение. Так как присваивание a удовлетворяет ψ , в дизъюнкте C_j имеется хотя бы один истинный литерал. Следовательно, среди трёх литеральных входов вершины G_j хотя бы один равен 1. Так как $z_{G_j}^{(0)} = 1$, два петлевых входа также равны 1. Значит, среди пяти входов вершины G_j не менее трёх равны 1, и потому

$$f_{G_j}(z^{(0)}) = 1 = z_{G_j}^{(0)}.$$

Следовательно, значение вершины G_j остаётся равным 1.

Рассмотрим вершину B_i . Её входами являются значения $\lambda_i, \bar{\lambda}_i$ и её собственное значение. По построению

$$z_{\lambda_i}^{(0)} + z_{\bar{\lambda}_i}^{(0)} = 1$$

в обычной арифметике, то есть ровно одно из значений $z_{\lambda_i}^{(0)}, z_{\bar{\lambda}_i}^{(0)}$ равно 1. Кроме того, $z_{B_i}^{(0)} = 0$. Следовательно, среди трёх входов вершины B_i ровно одна единица, поэтому

$$f_{B_i}(z^{(0)}) = 0 = z_{B_i}^{(0)}.$$

Значит, значение вершины B_i остаётся равным 0.

Итак, на всей траектории, исходящей из $z^{(0)}$, все вершины $\lambda_i, \bar{\lambda}_i, G_j, B_i$ сохраняют свои значения.

Теперь рассмотрим вершину δ_1 . Во входах, приходящих из слоя G_1, \dots, G_m , имеется ровно mn единиц, а во входах, приходящих из слоя B_1, \dots, B_n , имеется ровно mn нулей. Следовательно, среди всех входов вершины δ_1 , кроме входа из δ_k , ровно половина равна 1, а ровно половина равна 0. Поэтому значение мажоритарной функции в δ_1 определяется значением входа из δ_k :

$$f_{\delta_1}(z) = z_{\delta_k}.$$

Для вершин $\delta_2, \dots, \delta_k$ по построению имеем

$$f_{\delta_r}(z) = z_{\delta_{r-1}}, \quad r = 2, \dots, k.$$

Следовательно, на векторе $(z_{\delta_1}, \dots, z_{\delta_k})$ глобальное отображение действует как циклический сдвиг:

$$(1, 0, \dots, 0) \mapsto (0, 1, 0, \dots, 0) \mapsto \dots \mapsto (0, \dots, 0, 1) \mapsto (1, 0, \dots, 0).$$

Значит, конфигурация $z^{(0)}$ лежит на предельном цикле длины k , то есть

$$z^{(0)} \in \Phi_k(f).$$

(2) Если сеть \mathcal{N}_ψ имеет предельный цикл длины k , то формула ψ выполнима.

Пусть $z^{(0)} \in \Phi_k(f)$, а

$$z^{(t+1)} = f(z^{(t)}), \quad t \geq 0,$$

— соответствующая траектория.

Как и выше, из тождественности локальных функций в вершинах $\lambda_i, \bar{\lambda}_i$ следует, что значения этих вершин постоянны по времени. Следовательно, литеральные входы каждой вершины G_j и B_i постоянны.

Зафиксируем вершину G_j . При фиксированных литеральных входах её динамика имеет вид

$$u^{(t+1)} = \text{Maj}(c_1, c_2, c_3, u^{(t)}, u^{(t)}),$$

где $c_1, c_2, c_3 \in \{0, 1\}$ постоянны. Это одномерное монотонное отображение множества $\{0, 1\}$ в себя, поэтому оно не имеет циклов длины больше 1. Так как рассматриваемая траектория является периодической, значение вершины G_j на ней постоянно.

Аналогично, для каждой вершины B_i при фиксированных значениях $\lambda_i, \bar{\lambda}_i$ динамика имеет вид

$$u^{(t+1)} = \text{Maj}(c_1, c_2, u^{(t)}),$$

где $c_1, c_2 \in \{0, 1\}$ постоянны. Это также одномерное монотонное отображение, а значит, на периодической траектории значение вершины B_i постоянно.

Итак, на цикле могут изменяться только вершины $\delta_1, \dots, \delta_k$.

Обозначим через p число вершин G_j , имеющих значение 1, и через q число вершин B_i , имеющих значение 1:

$$p = \#\{j \in [m] \mid z_{G_j} = 1\}, \quad q = \#\{i \in [n] \mid z_{B_i} = 1\}.$$

Тогда число единиц среди входов вершины δ_1 , приходящих из слоя G_1, \dots, G_m , равно pn , а число единиц среди входов, приходящих из слоя B_1, \dots, B_n , равно qm . Следовательно, число единиц среди всех входов вершины δ_1 , кроме входа из δ_k , равно

$$pn + qm.$$

Общее число таких входов равно

$$mn + mn = 2mn.$$

Поскольку $z^{(0)}$ лежит на цикле длины $k \geq 2$, значение вершины δ_1 не может быть постоянным. Действительно, если бы δ_1 имела постоянное значение, то из равенств

$$f_{\delta_r}(z) = z_{\delta_{r-1}}, \quad r = 2, \dots, k,$$

следовало бы, что все вершины $\delta_1, \dots, \delta_k$ также имеют постоянные значения, а значит, весь цикл имел бы длину 1, что противоречит условию $k \geq 2$.

Следовательно, значение δ_1 должно зависеть от значения вершины δ_k . Это возможно только тогда, когда среди остальных входов в δ_1 число единиц равно числу нулей, то есть

$$pn + qm = mn.$$

Из этого равенства следует

$$qm = n(m - p).$$

Так как $\gcd(n, m) = 1$, из делимости числа qm на n получаем, что q делится на n . Поскольку $0 \leq q \leq n$, заключаем, что

$$q = 0 \quad \text{или} \quad q = n.$$

Аналогично из равенства

$$pn = m(n - q)$$

получаем, что p делится на m , а значит,

$$p = 0 \quad \text{или} \quad p = m.$$

С учётом равенства $pn + qt = mn$ остаются только два случая:

$$(p, q) = (m, 0) \quad \text{или} \quad (p, q) = (0, n).$$

Рассмотрим эти два случая отдельно.

Случай 1: $(p, q) = (m, 0)$. В этом случае все вершины G_j имеют значение 1, а все вершины B_i имеют значение 0.

Определим присваивание

$$a : \{y_1, \dots, y_n\} \rightarrow \{0, 1\}, \quad a(y_i) = z_{\lambda_i}.$$

Докажем, что для каждого дизъюнкта C_j формулы ψ найдётся литерал, истинный при присваивании a . Рассмотрим произвольный дизъюнкт C_j . Так как $z_{G_j} = 1$, а вершина G_j вычисляет мажоритарную функцию от пяти входов, среди которых два петлевых входа равны 1, то среди трёх литеральных входов вершины G_j хотя бы один также должен быть равен 1.

Пусть такой литерал равен ℓ . Если $\ell = y_i$, то $z_{\lambda_i} = 1$, и поэтому $a(y_i) = 1$. Значит, литерал y_i истинен при a .

Если же $\ell = \neg y_i$, то $z_{\bar{\lambda}_i} = 1$. Так как $z_{B_i} = 0$, а вершина B_i вычисляет мажоритарную функцию от трёх входов $\lambda_i, \bar{\lambda}_i, B_i$, то не может одновременно выполняться $z_{\lambda_i} = 1$. Иначе среди трёх входов вершины B_i было бы как минимум две единицы, и тогда B_i имела бы значение 1, противоречие. Следовательно, $z_{\lambda_i} = 0$, откуда $a(y_i) = 0$, и литерал $\neg y_i$ истинен при a .

Итак, в каждом дизъюнкте C_j имеется хотя бы один литерал, истинный при присваивании a . Следовательно, формула ψ выполнима.

Случай 2: $(p, q) = (0, n)$. В этом случае все вершины G_j имеют значение 0, а все вершины B_i имеют значение 1.

Определим присваивание

$$a : \{y_1, \dots, y_n\} \rightarrow \{0, 1\}, \quad a(y_i) = 1 - z_{\lambda_i}.$$

Докажем, что для каждого дизъюнкта C_j формулы ψ найдётся литерал, истинный при присваивании a . Рассмотрим произвольный дизъюнкт C_j . Так как $z_{G_j} = 0$, а вершина G_j вычисляет мажоритарную функцию от пяти входов, среди которых два петлевых входа равны 0, то среди трёх литеральных входов вершины G_j хотя бы один должен быть равен 0. Действительно, если бы все три литеральных входа были равны 1, то среди пяти входов вершины G_j было бы три единицы, и мажоритарная функция приняла бы значение 1, что противоречит равенству $z_{G_j} = 0$.

Пусть литерал, соответствующий такому нулевому входу, равен ℓ . Если $\ell = y_i$, то $z_{\lambda_i} = 0$. Поэтому

$$a(y_i) = 1 - z_{\lambda_i} = 1,$$

и литерал y_i истинен при a .

Если же $\ell = \neg y_i$, то $z_{\bar{\lambda}_i} = 0$. Так как $z_{B_i} = 1$, а вершина B_i вычисляет мажоритарную функцию от трёх входов $\lambda_i, \bar{\lambda}_i, B_i$, то среди двух входов $\lambda_i, \bar{\lambda}_i$ хотя бы один должен быть равен 1. Поскольку $z_{\bar{\lambda}_i} = 0$, получаем $z_{\lambda_i} = 1$. Следовательно,

$$a(y_i) = 1 - z_{\lambda_i} = 0,$$

и литерал $\neg y_i$ истинен при a .

Итак, и в этом случае в каждом дизъюнкте C_j имеется хотя бы один литерал, истинный при присваивании a . Следовательно, формула ψ выполнима.

Таким образом, в обоих возможных случаях $(p, q) = (m, 0)$ и $(p, q) = (0, n)$ из существования предельного цикла длины k следует выполнимость формулы ψ .

Итак, формула ψ выполнима тогда и только тогда, когда построенная сеть \mathcal{N}_ψ имеет предельный цикл длины k . Следовательно, задача $k\text{-PLCE}(D_2)$ NP-трудна. Совместно с принадлежностью классу NP получаем, что $k\text{-PLCE}(D_2)$ NP-полна. \square

Доказательство леммы 3. Принадлежность задачи $k\text{-PLCE}(F_6^\infty)$ классу NP следует из общей принадлежности задачи $k\text{-PLCE}$ классу NP, установленной в [1].

Остаётся доказать NP-трудность. Для этого построим полиномиальную редукцию

$$k\text{-PLCE}(D_2) \leq_P k\text{-PLCE}(F_6^\infty),$$

где NP-полнота левой задачи установлена в лемме 2.

Пусть задана булева сеть

$$f = (f_1, \dots, f_n), \quad f_i \in D_2 \text{ для всех } i \in [n].$$

Рассматривается параллельная схема обновления.

Построим по сети f новую сеть

$$g = (g_0, g_1, \dots, g_n)$$

размерности $n + 1$. Добавим новую вершину 0, обозначим её переменной y , и положим

$$g_0(y, x_1, \dots, x_n) = y.$$

Для каждой исходной вершины $i \in [n]$ определим

$$g_i(y, x_1, \dots, x_n) = y \cdot f_i(x_1, \dots, x_n).$$

Покажем, что все функции g_i принадлежат F_6^∞ . Будем пользоваться следующим описанием класса F_6^∞ : булева функция принадлежит F_6^∞ , если она монотонна, сохраняет константы 0 и 1, и её значение не превосходит значения некоторой её переменной.

Сначала рассмотрим функцию g_0 . По определению

$$g_0(y, x_1, \dots, x_n) = y.$$

Она монотонна, сохраняет 0 и 1, и для всех входов выполнено

$$g_0(y, x_1, \dots, x_n) = y \leq y.$$

Следовательно, $g_0 \in F_6^\infty$.

Теперь пусть $i \in [n]$. Так как $f_i \in D_2$, функция f_i монотонна и самодвойственна. В частности, она сохраняет константы 0 и 1. Действительно, из монотонности следует

$$f_i(0, \dots, 0) \leq f_i(1, \dots, 1),$$

а из самодвойственности —

$$f_i(0, \dots, 0) = 1 - f_i(1, \dots, 1).$$

Значит,

$$f_i(0, \dots, 0) = 0, \quad f_i(1, \dots, 1) = 1.$$

Рассмотрим функцию

$$g_i(y, x_1, \dots, x_n) = y \cdot f_i(x_1, \dots, x_n).$$

Она монотонна как конъюнкция двух монотонных функций. Кроме того,

$$g_i(0, 0, \dots, 0) = 0$$

и

$$g_i(1, 1, \dots, 1) = 1 \cdot f_i(1, \dots, 1) = 1,$$

то есть g_i сохраняет 0 и 1. Наконец, для любого набора значений входов выполнено

$$g_i(y, x_1, \dots, x_n) = y \cdot f_i(x_1, \dots, x_n) \leq y.$$

Следовательно, $g_i \in F_6^\infty$.

Итак,

$$g_0, g_1, \dots, g_n \in F_6^\infty.$$

Остаётся показать эквивалентность по существованию цикла длины k .

(1) Если в сети f существует предельный цикл длины k , то такой же цикл существует в сети g . Пусть $x^{(0)} \in \Phi_k(f)$, то есть

$$f^k(x^{(0)}) = x^{(0)}, \quad f^t(x^{(0)}) \neq x^{(0)} \text{ для всех } t = 1, \dots, k-1.$$

Рассмотрим конфигурацию

$$z^{(0)} = (1, x^{(0)}).$$

Тогда при параллельном обновлении

$$y^{(t+1)} = g_0(y^{(t)}, x^{(t)}) = y^{(t)},$$

и потому $y^{(t)} \equiv 1$ для всех $t \geq 0$. Кроме того,

$$x_i^{(t+1)} = g_i(y^{(t)}, x^{(t)}) = y^{(t)} \cdot f_i(x^{(t)}) = f_i(x^{(t)}), \quad i \in [n].$$

Следовательно, если обозначить через $\pi : \{0, 1\}^{n+1} \rightarrow \{0, 1\}^n$ проекцию

$$\pi(y, x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n),$$

то для всех $t \geq 0$ выполняется равенство

$$\pi(z^{(t)}) = f^t(x^{(0)}).$$

Отсюда

$$z^{(k)} = (1, f^k(x^{(0)})) = (1, x^{(0)}) = z^{(0)},$$

а для всех $t = 1, \dots, k - 1$

$$z^{(t)} = (1, f^t(x^{(0)})) \neq (1, x^{(0)}).$$

Следовательно, $z^{(0)} \in \Phi_k(g)$.

(2) Если в сети g существует предельный цикл длины $k \geq 2$, то такой же цикл существует в сети f . Пусть

$$z^{(0)} = (y^{(0)}, x^{(0)}) \in \Phi_k(g), \quad z^{(t+1)} = g(z^{(t)}).$$

Из равенства $g_0(y, x) = y$ следует, что

$$y^{(t+1)} = y^{(t)} \quad \text{для всех } t \geq 0,$$

то есть $y^{(t)} \equiv y^{(0)}$.

Если $y^{(0)} = 0$, то

$$x_i^{(t+1)} = g_i(0, x^{(t)}) = 0 \quad \text{для всех } i \in [n], t \geq 0,$$

и уже через один шаг траектория попадает в конфигурацию $(0, 0, \dots, 0)$, то есть возможен только цикл длины 1. Это противоречит предположению $k \geq 2$. Значит, для цикла длины $k \geq 2$ необходимо $y^{(0)} = 1$.

Тогда $y^{(t)} \equiv 1$ для всех t , и потому

$$x_i^{(t+1)} = g_i(1, x^{(t)}) = f_i(x^{(t)}), \quad i \in [n].$$

Следовательно,

$$x^{(t+1)} = f(x^{(t)}) \quad \text{для всех } t \geq 0.$$

Из $z^{(k)} = z^{(0)}$ получаем

$$x^{(k)} = f^k(x^{(0)}) = x^{(0)},$$

а из $z^{(t)} \neq z^{(0)}$ для $t = 1, \dots, k - 1$ следует

$$x^{(t)} \neq x^{(0)} \quad \text{для тех же } t.$$

Значит, $x^{(0)} \in \Phi_k(f)$.

Тем самым по сети f за полиномиальное время строится сеть g такая, что сеть f является положительным экземпляром задачи $k\text{-PLCE}(D_2)$ тогда и только тогда, когда сеть g является положительным экземпляром задачи $k\text{-PLCE}(F_6^\infty)$. Следовательно,

$$k\text{-PLCE}(D_2) \leq_P k\text{-PLCE}(F_6^\infty).$$

Так как задача $k\text{-PLCE}(D_2)$ NP-полна по лемме 2, а задача $k\text{-PLCE}(F_6^\infty)$ принадлежит классу NP, получаем, что $k\text{-PLCE}(F_6^\infty)$ NP-полна. \square

Доказательство леммы 4. Класс F_2^∞ двойственен классу F_6^∞ . По принципу двойственности булевых функций и по лемме 3 получаем, что задача k -PLCE(F_2^∞) также является NP-полной. \square

В отличие от NP-полных случаев, для класса L_1 задача k -PLCE допускает более эффективный алгоритм: её можно решить за время $O(n^3k)$.

Доказательство леммы 5. Пусть булева сеть $f = (f_1, \dots, f_n)$ состоит из функций класса L_1 . Тогда каждая локальная функция аффинно-линейна над полем \mathbb{F}_2 , и, следовательно, глобальное отображение сети имеет вид

$$f(x) = Ax \oplus b,$$

где $A \in M_n(\mathbb{F}_2)$, $b \in \mathbb{F}_2^n$, а $x \in \mathbb{F}_2^n$.

Для каждого натурального t обозначим через $S(t)$ число неподвижных точек отображения f^t , то есть

$$S(t) = |\{x \in \mathbb{F}_2^n \mid f^t(x) = x\}|.$$

Обозначим также через $P(d)$ число конфигураций, минимальный период которых относительно f равен d .

Тогда конфигурация является неподвижной точкой отображения f^t тогда и только тогда, когда её минимальный период делит t . Следовательно, для каждого $t \geq 1$ имеем

$$S(t) = \sum_{d|t} P(d).$$

По формуле обращения Мёбиуса отсюда получаем

$$P(k) = \sum_{d|k} \mu(k/d) S(d),$$

где μ — функция Мёбиуса.

Таким образом, предельный цикл длины k существует тогда и только тогда, когда $P(k) > 0$. Поэтому достаточно вычислить все значения $S(d)$ для делителей $d \mid k$.

Шаг 1. Вычисление отображений f^t для $t = 1, \dots, k$.

Рассмотрим матрицу

$$M = \begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{n+1}(\mathbb{F}_2).$$

Непосредственной проверкой по индукции получаем, что для каждого $t \geq 1$ матрица M^t имеет вид

$$M^t = \begin{pmatrix} A_t & b_t \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где

$$f^t(x) = A_t x \oplus b_t.$$

Действительно, база $t = 1$ очевидна. Если

$$M^t = \begin{pmatrix} A_t & b_t \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

то

$$M^{t+1} = M M^t = \begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_t & b_t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA_t & Ab_t \oplus b \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

то есть $f^{t+1}(x) = A(A_t x \oplus b_t) \oplus b$.

Следовательно, все матрицы M, M^2, \dots, M^k можно вычислить последовательно. Один шаг умножения матриц размера $(n+1) \times (n+1)$ занимает $O(n^3)$ операций, поэтому все эти матрицы вычисляются за

$$O(n^3 k).$$

Шаг 2. Вычисление чисел $S(d)$ для всех $d \mid k$.

Для каждого делителя $d \mid k$, зная матрицу

$$M^d = \begin{pmatrix} A_d & b_d \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

получаем представление

$$f^d(x) = A_d x \oplus b_d.$$

Условие $f^d(x) = x$ эквивалентно системе линейных уравнений

$$(A_d \oplus I)x = b_d$$

над полем \mathbb{F}_2 . Число решений этой системы равно $S(d)$, и его можно найти методом Гаусса за $O(n^3)$ операций.

Так как число делителей числа k не превосходит k , суммарное время вычисления всех значений $S(d)$ для $d \mid k$ не превосходит

$$O(n^3 k).$$

Шаг 3. Вычисление $P(k)$.

После нахождения всех $S(d)$, $d \mid k$, значение $P(k)$ вычисляется по формуле

$$P(k) = \sum_{d \mid k} \mu(k/d) S(d).$$

Это требует не более чем $O(k)$ арифметических операций, что поглощается оценкой $O(n^3 k)$.

Итак, за время

$$O(n^3 k)$$

мы вычисляем число $P(k)$ конфигураций с минимальным периодом ровно k . Следовательно, можно за то же время проверить условие $P(k) > 0$, которое эквивалентно существованию предельного цикла длины k .

Тем самым задача k -PLCE(L_1) решается за время $O(n^3 k)$. В частности, при фиксированном k она принадлежит классу P . \square

6. Заключение

В настоящей работе исследована вычислительная сложность задачи k -Parallel Limit Cycle Existence (k -PLCE) для булевых сетей, построенных из функций различных классов решётки Поста. Доказано, что задача k -PLCE остаётся NP-полной даже при значительных функциональных ограничениях, в частности, для класса D_2 , включающего только монотонные самодвойственные функции, а также для классов F_6^∞ и F_2^∞ . В то же время установлено, что для класса линейных функций L_1 задача k -PLCE является полиномиально разрешимой.

Полученные результаты составляют основу для дальнейшего анализа вычислительной сложности динамики булевых сетей при структурных и функциональных ограничениях. Перспективными направлениями дальнейших исследований являются:

- получение полной классификации задачи k -PLCE за счёт анализа оставшихся классов S_6 и P_6 решётки Поста;
- изучение параметризованной вычислительной сложности задачи по параметрам k и/или максимальной входной степени графа взаимодействия;
- обобщение результатов на другие схемы обновления, такие как асинхронные или блочно-последовательные;
- исследование приближённых алгоритмов и эвристик для решения задачи k -PLCE в практических приложениях.

В целом, настоящая работа способствует теоретическому пониманию связи между логической структурой локальных функций и вычислительной сложностью глобальной динамики дискретных динамических систем.

Список литературы

- [1] Bridoux F., Gaze-Maillet C., Perrot K., Séné S., “Complexity of Limit-Cycle Problems in Boolean Networks”, *SOFSEM 2021: Theory and Practice of Computer Science*, Lecture Notes in Computer Science, vol. 12607, Springer, 2021, 135–146. DOI: 10.1007/978-3-030-67731-2_10.
- [2] Aracena J., Bridoux F., Gómez L., Salinas L., “Complexity of Limit Cycles with Block-Sequential Update Schedules in Conjunctive Networks”, *Natural Computing*, **22** (2023. DOI: 10.1007/s11047-023-09947-0), 411–429.
- [3] Gadouleau M., Richard A., Fanchon E., “Reduction and Fixed Points of Boolean Networks and Linear Network Coding Solvability”, *IEEE Transactions on Information Theory*, **62**:5 (2016. DOI: 10.1109/TIT.2016.2544344), 2504–2519.
- [4] McCulloch W., Pitts W., “A Logical Calculus of the Ideas Immanent in Nervous Activity”, *The Bulletin of Mathematical Biophysics*, **5**:4 (1943. DOI: 10.1007/BF02478259), 115–133.
- [5] Goles E., Ruz G.A., “Dynamics of Neural Networks over Undirected Graphs”, *Neural Networks*, **60** (2014. DOI: 10.1016/j.neunet.2014.10.013), 1–8.
- [6] Aledo J.A., Diaz L.G., Martinez S., Valverde J.C., “Coexistence of Periods in Parallel and Sequential Boolean Graph Dynamical Systems over Directed Graphs”, *Mathematics*, **8**:10 (2020. DOI: 10.3390/math8101812), 1812.
- [7] Chossat P., Krupa M., “Heteroclinic Cycles in Hopfield Networks”, *Journal of Nonlinear Science*, **26**:2 (2016), 315–344.
- [8] Ladwani V.M., Ramasubramanian V., “M-ary Hopfield Neural Network for Storage and Retrieval of Variable Length Sequences: Multi-limit Cycle Approach”, *Proceedings of the 2023 International Conference on Artificial Neural Networks (ICANN)*, Springer, 2023. DOI: 10.1007/978-3-031-44192-9_21, 255–268.
- [9] Hesse J., Czaja W., Komorowski M., Jansen R.C., “Oscillations in Gene Regulatory Networks Are Essential for a Robust Molecular Clock”, *PLoS Computational Biology*, **15**:10 (2019. DOI: 10.1371/journal.pcbi.1007361), e1007361.
- [10] Likhoshvai V.A., Golubyatnikov V.P., Khlebodarova T.M., “Limit cycles in models of circular gene networks regulated by negative feedback loops”, *BMC Bioinformatics*, **21** (2020. DOI: 10.1186/s12859-020-03598-z), 255.
- [11] Kauffman S.A., “Metabolic stability and epigenesis in randomly constructed genetic nets”, *Journal of Theoretical Biology*, **22**:3 (1969), 437–467.
- [12] Thomas R., “Boolean formalization of genetic control circuits”, *Journal of Theoretical Biology*, **42**:3 (1973), 563–585.
- [13] Thomas R., D’Ari R., *Biological Feedback*, CRC Press, Boca Raton, 1990.

- [14] Riis Søren, “Information flows, graphs and their guessing numbers”, *The Electronic Journal of Combinatorics*, **14**:1 (2007. DOI: 10.37236/962), R44.
- [15] Gadouleau M., Riis Søren, “Graph-Theoretical Constructions for Graph Entropy and Network Coding Based Communications”, *IEEE Transactions on Information Theory*, **57**:10 (2011. DOI: 10.1109/TIT.2011.2155618), 6703–6717.
- [16] Hopfield J.J., “Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities”, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **79**:8 (1982. DOI: 10.1073/pnas.79.8.2554), 2554–2558.
- [17] Kosub S., “Dichotomy Results for Fixed-Point Existence Problems for Boolean Dynamical Systems”, *Mathematics in Computer Science*, **1**:3 (2008. DOI: 10.1007/s11786-007-0038-y), 487–505.
- [18] Яблонский С.В., Гаврилов Г.П., Кудрявцев В.Б., *Функции алгебры логики и классы Поста*, Наука, Москва, 1966 .

Статья поступила 30 апреля 2026 г.

Computational Complexity of Limit Cycle Existence in Boolean Networks Restricted by Post Classes

A. S. Drobyshev

The paper studies the computational complexity of detecting limit cycles of fixed length k in Boolean networks with local functions restricted to Post classes. It is proven that the problem is NP-complete for expressive classes D_2 (monotone self-dual functions), F_6^∞ , and F_2^∞ , while polynomial-time solvable for linear functions L_1 . Explicit polynomial reductions from 3-SAT preserving limit cycles of length k are constructed.

Keywords: Boolean networks, limit cycles, Post lattice, computational complexity, NP-completeness.

References

- [1] Bridoux F., Gaze-Maillet C., Perrot K., Séné S., “Complexity of Limit-Cycle Problems in Boolean Networks”, *SOFSEM 2021: Theory and Practice of Computer Science*, Lecture Notes in Computer Science, vol. 12607, Springer, 2021, 135–146. DOI: 10.1007/978-3-030-67731-2_10.
- [2] Aracena J., Bridoux F., Gómez L., Salinas L., “Complexity of Limit Cycles with Block-Sequential Update Schedules in Conjunctive Networks”, *Natural Computing*, **22** (2023. DOI: 10.1007/s11047-023-09947-0), 411–429.

- [3] Gadouleau M., Richard A., Fanchon E., “Reduction and Fixed Points of Boolean Networks and Linear Network Coding Solvability”, *IEEE Transactions on Information Theory*, **62**:5 (2016. DOI: 10.1109/TIT.2016.2544344), 2504–2519.
- [4] McCulloch W., Pitts W., “A Logical Calculus of the Ideas Immanent in Nervous Activity”, *The Bulletin of Mathematical Biophysics*, **5**:4 (1943. DOI: 10.1007/BF02478259), 115–133.
- [5] Goles E., Ruz G.A., “Dynamics of Neural Networks over Undirected Graphs”, *Neural Networks*, **60** (2014. DOI: 10.1016/j.neunet.2014.10.013), 1–8.
- [6] Aledo J.A., Diaz L.G., Martinez S., Valverde J.C., “Coexistence of Periods in Parallel and Sequential Boolean Graph Dynamical Systems over Directed Graphs”, *Mathematics*, **8**:10 (2020. DOI: 10.3390/math8101812), 1812.
- [7] Chossat P., Krupa M., “Heteroclinic Cycles in Hopfield Networks”, *Journal of Nonlinear Science*, **26**:2 (2016), 315–344.
- [8] Ladwani V.M., Ramasubramanian V., “M-ary Hopfield Neural Network for Storage and Retrieval of Variable Length Sequences: Multi-limit Cycle Approach”, *Proceedings of the 2023 International Conference on Artificial Neural Networks (ICANN)*, Springer, 2023. DOI: 10.1007/978-3-031-44192-9_21, 255–268.
- [9] Hesse J., Czaja W., Komorowski M., Jansen R.C., “Oscillations in Gene Regulatory Networks Are Essential for a Robust Molecular Clock”, *PLoS Computational Biology*, **15**:10 (2019. DOI: 10.1371/journal.pcbi.1007361), e1007361.
- [10] Likhoshvai V.A., Golubyatnikov V.P., Khlebodarova T.M., “Limit cycles in models of circular gene networks regulated by negative feedback loops”, *BMC Bioinformatics*, **21** (2020. DOI: 10.1186/s12859-020-03598-z), 255.
- [11] Kauffman S.A., “Metabolic stability and epigenesis in randomly constructed genetic nets”, *Journal of Theoretical Biology*, **22**:3 (1969), 437–467.
- [12] Thomas R., “Boolean formalization of genetic control circuits”, *Journal of Theoretical Biology*, **42**:3 (1973), 563–585.
- [13] Thomas R., D’Ari R., *Biological Feedback*, CRC Press, Boca Raton, 1990.
- [14] Riis Søren, “Information flows, graphs and their guessing numbers”, *The Electronic Journal of Combinatorics*, **14**:1 (2007. DOI: 10.37236/962), R44.
- [15] Gadouleau M., Riis Søren, “Graph-Theoretical Constructions for Graph Entropy and Network Coding Based Communications”, *IEEE Transactions on Information Theory*, **57**:10 (2011. DOI: 10.1109/TIT.2011.2155618), 6703–6717.
- [16] Hopfield J.J., “Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities”, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **79**:8 (1982. DOI: 10.1073/pnas.79.8.2554), 2554–2558.
- [17] Kosub S., “Dichotomy Results for Fixed-Point Existence Problems for Boolean Dynamical Systems”, *Mathematics in Computer Science*, **1**:3 (2008. DOI: 10.1007/s11786-007-0038-y), 487–505.

- [18] Yablonsky S.V., Gavrilov G.P., Kudryavtsev V.B., *Functions of Logic Algebra and Post Classes*, Nauka, Moscow, 1966 (In Russian).

Received on April 30, 2026