

О некоторых подходах к получению асимптотических оценок сложности реализации систем булевых функций в модели клеточных схем

С. А. Ложкин* , В. С. Зизов‡

В работе рассматриваются вопросы асимптотической сложности реализации систем булевых функций в модели клеточных схем из функциональных и коммутационных элементов. Основное внимание уделено получению асимптотических оценок высокой степени точности для площади клеточных схем, реализующих достаточно большие классы булевых функций. Сформулированы методы получения верхних и нижних асимптотических оценок, применимые к широким классам функций. На основе этих методов как следствие получены асимптотические оценки высокой степени точности для системы всех самодвойственных булевых функций. Для получения верхних оценок используется конструктивный подход, основанный на сведении исследуемых классов функций к универсальным многополюсникам меньшего порядка и последующей модификации реализующих их клеточных схем. В результате для класса самодвойственных булевых функций установлены согласованные верхние и нижние асимптотические оценки площади, что приводит к асимптотическому равенству порядка роста сложности их реализации в модели клеточных схем.

Ключевые слова: клеточные схемы, площадь схемы, асимптотические оценки, асимптотические оценки высокой степени точности, системы булевых функций, самодвойственные функции, универсальный многополюсник.

* *Ложкин Сергей Андреевич* — профессор, д.ф.-м.н., заведующий кафедрой математической кибернетики факультета ВМК МГУ, e-mail: lozhkin@cs.msu.ru, ORCID: 0000-0002-8952-6046.

Lozhkin Sergey Andreevich — Professor, Doctor of Physics and Mathematics, Head of the Chair of Mathematical Cybernetics, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Lomonosov Moscow State University..

‡ *Зизов Вадим Сергеевич* — м.н.с. кафедры математической кибернетики факультета ВМК МГУ, e-mail: vzs815@gmail.com, ORCID: 0000-0002-4053-4803.

Zizov Vadim Sergeevich — Chair of Mathematical Cybernetics, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Lomonosov Moscow State University..

1. Введение

Впервые модель клеточных схем (КС) в «стандартном» базисе B_0 из функциональных и коммутационных элементов, где под сложностью КС понималась ее площадь, была предложена в 1967 году С.С. Кравцовым в [1]. Она положила начало исследованиям, связанным с решением в рамках данной модели различных задач и, в первую очередь, задачи синтеза.

Будем предполагать, что базис B является конечным функционально полным базисом в модели клеточных схем, состоящим из функциональных и коммутационных элементов, каждый из которых имеет форму единичного квадрата, причем входы и выходы каждого элемента однократно располагаются на серединах его сторон (см. рис. 1 и ср. с [1]).

Каждая КС над базисом B представляет собой прямоугольную решетку, состоящую из элементов базиса, соединенных между собой «корректным» [9] способом через середины общих сторон. При этом входные и выходные булевы переменные (БП) данной КС, связанные с её входами и выходами, однократно приписываются расположенным на границе схемы входам и выходам её элементов соответственно. Структура соединений входов, функциональных элементов и выходов КС задает схему из функциональных элементов над функциональной частью базиса B (см. [2]).

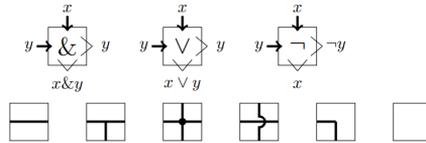


Рис. 1: Базис B'_0 , состоящий из 3 функциональных, 5 коммутационных элементов и изолятора. Нетождественные выходы функциональных элементов сонаправлены осям символов конъюнкции и дизъюнкции. Все элементы допускают поворот и отражение.

Задача (индивидуального) синтеза связана с изучением функционала сложности $A_B(F)$, который определяется для системы булевых функций (БФ) $F = (f_1, \dots, f_m) \in P_2^m(n)$, где $P_2(n)$ – множество всех БФ от булевых переменных (БП) $X(n) = \{x_1, \dots, x_n\}$. Функционал $A(\Sigma)$ называемый, обычно, её площадью, определяется как произведение линейных размеров схемы, то есть длины $\lambda(\Sigma)$ на её ширину $h(\Sigma)$, где $\lambda(\Sigma) \geq h(\Sigma)$. При этом считается, что функционал $A_B(F)$ (соответственно $h_B(F)$) равен мини-

мальной площади (соответственно высоте) КС в базисе B , реализующих систему БФ F .

Во многих случаях реализуемая система БФ F имеет вид $F = \vec{H}$, где $H \subseteq P_2(n)$, то есть состоит из всех БФ множества H , упорядоченных в соответствии с лексикографической нумерацией их столбцов значений. При этом рассматривается, обычно, последовательность множеств $H(1), H(2), \dots, H(n), \dots$, где $H(n) \subseteq P_2(n)$ при всех $n, n = 1, 2, \dots$, и устанавливается (асимптотическое) поведение последовательности

$$A_B(\vec{H}(n)) \text{ при } n = 1, 2, \dots$$

Так, в работе [1], а также в работе Н.А. Шкаликовой [3], был установлен порядок роста вида $n \cdot 2^n$ для площади $A_{B_0}(\vec{K}(n))$, вида $n \cdot 2^{2^n}$ для площади $A_{B_0}(\vec{P}_2(n))$ и вида $\log n \cdot 2^n$ для площади $A_{B_0}(\vec{S}(n))$, где множество $K(n)$ состоит из всех элементарных конъюнкций ранга n от БП $X(n)$, то есть $\vec{K}(n)$ является т.н. *дешифратором* порядка n , а множество $S(n)$ состоит из всех симметрических БФ из $P_2(n)$. Напомним, что система БФ $\vec{P}_2(n)$ называется, обычно, *универсальным многополосником порядка n* . Напомним также, что симметрической называется функция, значение которой не зависит от перестановки её аргументов.

В работах Г.В. Калачева [4] в качестве базиса клеточных элементов рассматриваются все булевы операторы, суммарное число входов и выходов которых не превышает 4. В качестве меры мощности рассматривается средний потенциал, количество выходов элементов, выдающих единицу на заданном входном наборе схемы, усреднённое по всем входным наборам. Получены нижние оценки функции Шеннона в зависимости от ограничений на расположение выходов схем. В работе [5] определяются две меры мощности схем – потенциал и переключательная мощность, причем каждая из них исследуется как в среднем, так и в худшем случае. Потенциал равен количеству выходов клеточных элементов, равных единице, и характеризует «статическую» активность КСФЭ. Переключательная мощность определяется на паре входных наборов и равна количеству выходов клеточных элементов, поменявших значение при изменении входного набора с первого на второй. Эта мера мощности характеризует «динамическую активность» КСФЭ и более приближена к реальному энергопотреблению интегральной схемы, построенной по данной «клеточной» модели. В работе [6] исследуется поведение функций Шеннона для этих мер мощности и для различных классов частичных булевых операторов, а также связь этих мер с площадью и глубиной. В частности, устанавливается оценка площади для оптимальных по порядку мощности клеточных схем, равная $m2^n$ для всюду определённых функций, где за m обозначено число выходов.

По аналогии с работой [7] последовательность $R(n), n = 1, 2, \dots$ такую, что $R(n) \leq A_B(\vec{H}(n))$ (соответственно $R(n) \geq A_B(\vec{H}(n))$) будем считать нижними (соответственно верхними) **асимптотическими оценками высокой степени точности** (АОВСТ) для последовательности $A_B(\vec{H}(n))$ в модели КС над базисом B , если

$$|R(n) - A_B(\vec{H}(n))| = O\left(\frac{A_B(\vec{H}(n))}{h_B(\vec{H}(n))}\right).$$

В работе [8] были установлены асимптотически точные верхние и нижние АОВСТ для площади схем над базисом B'_0 , реализующих дешифратор порядка n , которые имеют вид $n2^{n-1}(1 \pm O(\frac{1}{n}))$. В работе [9] получены асимптотически точные нижние оценки вида $A_{B'_0}(\mu_n) \geq n2^{n-1}(1 - \frac{\log n}{n})$ для т.н. мультиплексорной БФ μ_n порядка n , а также её верхние АОВСТ.

В работе [10] были установлены верхние и нижние АОВСТ для сложности $A_{B'_0}(\vec{P}_2(n))$, то есть для площади универсального многополюсника порядка n в модели клеточных схем над базисом B'_0 , имеющие вид

$$n \cdot 2^{2^n-1} - O(n^2) \leq A_{B'_0}(\vec{P}_2(n)) \leq (n+6)2^{2^n-1} + \frac{3n}{2^n}2^{2^n-1}, \quad (1)$$

Булева функция $f(x_1, \dots, x_n)$ называется *самодвойственной*, если

$$f(x_1, \dots, x_n) = \overline{f(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n})},$$

где $\overline{x_i}$ — отрицание переменной x_i . Множество всех самодвойственных БФ от БП $X(n)$ будем обозначать $D(n)$.

В настоящей работе аналогичные (1) результаты установлены для класса $D(n)$, то есть получены верхние и нижние АОВСТ для площади $A_{B'_0}(\vec{D}(n))$ (см. также [11]).

2. Метод получения нижних оценок сложности исследуемых систем булевых функций и его применение к классу самодвойственных БФ

Перейдем далее к получению нижних оценок сложности реализации достаточно «больших» систем БФ на основе т.н. тестового подхода, пример применения которого для системы ФАЛ $\vec{P}_2(n)$ дан в [10], а для системы $S(n)$ в [11].

Теорема 1. Для $n \geq 3$ и произвольной системы БФ вида \vec{G} , где множество $G, G \subseteq P_2(n)$, удовлетворяет неравенству $|G| \geq 2^{2^{n/2}} + 2$, не

содержит БП из $X(n)$, но для каждого $i, i \in [1, n]$ содержит хотя бы одну БФ, существенно зависящую от БП x_i , справедливо неравенство

$$A(\vec{G}) \geq (2h_G - n) \cdot \left(\frac{|G| + n}{2} - 2h_G + n \right), \quad (2)$$

где

$$h_G = \left\lceil \log \left\lceil \log \left\lfloor \frac{|G| - 1}{2} \right\rfloor \right\rceil \right\rceil.$$

Доказательство. Заметим, сначала, что клеточная схема Σ , реализующая указанную в условии теоремы систему ФАЛ \vec{G} удовлетворяет неравенствам

$$\lambda(\Sigma) \geq h(\Sigma) \geq h(\vec{G}), \quad 2(h(\Sigma) + \lambda(\Sigma)) \geq n + |\vec{G}|. \quad (3)$$

Решая задачу минимизации произведения $h(\Sigma) \cdot \lambda(\Sigma)$ при условиях (3), получим

$$A(\Sigma) \geq \frac{1}{2} h(\vec{G}) \cdot (|G| + n - 2h(\vec{G})). \quad (4)$$

Нижняя оценка (2) для системы функций \vec{G} вытекает из (4) и неравенства $h(\vec{G}) \geq 2h_G - n$, которое мы далее докажем, заметив, что $h_G \geq 2h_G - n$.

Пусть для клеточной схемы Σ , реализующей систему ФАЛ \vec{G} , выполняется неравенство $h = h(\Sigma) < 2h_G - n$. Тогда из соотношений

$$N = \left\lfloor \frac{|G| - 1}{2} \right\rfloor \geq h_G, \quad (5)$$

верных при условии $|\vec{G}| \geq 5$, которое выполняется в случае $n \geq 3$, как это оговорено в формулировке теоремы, следует, что схему Σ можно подходящим вертикальным сечением π разделить на «левую» подсхему Σ' и «правую» подсхему Σ'' , каждая из которых содержит не менее, чем N выходов этой схемы.

Действительно, пусть $\hat{\pi}$ — вертикальное сечение КС Σ , дисбаланс

$$d(\hat{\pi}) = |m' - m''|$$

которого не меньше 2, где \hat{m}' и \hat{m}'' — число выходов КС Σ , расположенных слева и справа от $\hat{\pi}$ соответственно. Тогда в случае $\hat{m}' < \hat{m}''$ (соответственно $\hat{m}' > \hat{m}''$) сдвигая $\hat{\pi}$ на 1 вправо (соответственно влево)

мы получим сечение, дисбаланс которого не больше, чем $d(\hat{\pi})$, но и не меньше, чем $d(\hat{\pi}) - 2$.

Повторяя указанные сдвиги до тех пор, пока дисбаланс сечения не окажется в сегменте $[0, 1]$, мы либо получим искомое сечение π , либо достигнем вертикальной стороны, что влечет за собой выполнение неравенств $h(\Sigma) \geq \frac{|G|}{2} > h_G$, последнее из которых в силу (5) противоречит предположению о том, что $h(\Sigma) < 2h_G - n \leq h_G$.

Пусть, далее, подсхемы Σ' и Σ'' содержат входные переменные схемы Σ из множеств X' и X'' соответственно, а на содержащихся в Σ' и Σ'' выходах схемы Σ в ней реализуются функции из множеств G' и G'' соответственно, где

$$X' \cap X'' = \emptyset, X' \cup X'' = X(n), \quad G' \cap G'' = \emptyset, G' \cup G'' = G.$$

Положим

$$|X'| = n', |X''| = n'', |G'| = m', |G''| = m'',$$

и заметим, что согласно вышесказанному,

$$n' + n'' = n, \quad m' + m'' = |G|, \quad m' \geq N, \quad m'' \geq N. \quad (6)$$

Пусть, наконец, на сечении π располагаются p' и p'' дополнительных входов схемы Σ' и схемы Σ'' соответственно, которые присоединены к p' и p'' дополнительным выходам схемы Σ'' и схемы Σ' соответственно. Выберем в кубе $B^n = B^{n'}(X') \times B^{n''}(X'')$ множество наборов A' , которое является тупиковым диагностическим тестом для множества функций G' и для которого, очевидно, с учетом (6), верны неравенства

$$|A'| \geq \lceil \log m' \rceil \geq \lceil \log N \rceil. \quad (7)$$

Заметим, что в силу особенностей структуры схемы Σ и тупиковости теста A' из любых двух различных наборов значений переменных (X', X'') вида (α', β'') и (α', γ'') , которым соответствует один и тот же вектор значений дополнительных выходов схемы Σ'' , в A' может входить только один. Это означает, что

$$|A'| \leq 2^{n'+p'},$$

и, следовательно, в силу (7) справедливо неравенство

$$n' + p' \geq \lceil \log \lceil \log N \rceil \rceil.$$

Аналогичным образом доказывается неравенство

$$n'' + p'' \geq \lceil \log \lceil \log N \rceil \rceil,$$

суммируя которое с (7) и учитывая (4), получим неравенство

$$h(\Sigma) \geq 2h_G - n,$$

приводящее к противоречию со сделанным ранее предположением. \square

Из теоремы 1 вытекают нижние АОВСТ для сложности системы $\vec{D}(n)$.

Следствие 1. При $n = 3, 4, \dots$ выполнено:

$$A(\vec{D}(n)) \geq \frac{n-2}{2}(2^{2^{n-1}} - n + 2) \geq n2^{2^{n-1}-1} - 2^{2^{n-1}} - \frac{n^2}{2}.$$

3. Методы получения верхних оценок сложности исследуемых систем булевых функций. Верхние оценки системы всех самодвойственных функций

Для получения верхних оценок сложности реализации последовательности систем булевых функций $\vec{H}(n), n = 1, 2, \dots$, где $H(n) \subseteq P_2(n)$ в модели клеточных схем над базисом B'_0 можно использовать следующий подход, который был разработан в [10] для универсальных многополосников.

Покроем множество $H(n)$, рассматриваемое как множество наборов куба B^{2^n} , непересекающимися единичными сферами S_1, \dots, S_p данного куба с «центрами» g_1, \dots, g_p . Построим для каждого $i, i = 1, \dots, p$, (двустороннюю) КС Σ_i в базисе B'_0 , которая реализует все БФ из $H(n) \cap S_i$, имея длину $\frac{1}{2}|H(n) \cap S_i|(1 + \bar{o}(1))$ и высоту $n + O(1)$.

Эта КС, пропуская через себя по горизонтали БП из $X(n)$, реализует сначала БФ g_i , а затем осуществляет коррекцию ее столбца значений для получения каждой БФ из $H(n) \cap S_i$, используя для этого один вертикальный ряд. Последовательное горизонтальное соединение КС $\Sigma_1, \dots, \Sigma_p$ дает искомую КС для системы $\vec{H}(n)$.

В настоящей работе мы будем использовать также метод модификации последовательности КС $\Sigma'_n, n = 1, 2, \dots$, реализующих последовательность систем БФ $\vec{H}(n)$, где $H(n) \subseteq P_2(n)$, для реализации «близкой» к ней последовательности систем БФ $\vec{F}(n), F(n) \subseteq P_2(n), n = 1, 2, \dots$.

Указанная модификация возможна, если $|F(n)| = |H(n)|$ и каждая ФАЛ $f, f \in F(n)$, может быть представлена в виде $f = g(h, x_1, \dots, x_k)$, где $k = k(n) = \bar{o}(n), h \in H(n)$, а $g \in P_2(k + 1)$, причем данное представление

задает взаимно-однозначное соответствие между множествами $F(n)$ и $H(n)$. При этом «переделка» КС Σ'_n , реализующей систему БФ $\vec{H}(n)$, в схему Σ''_n , реализующую систему БФ $F(n)$, заключается в следующем.

1. Приведем как выше, так и ниже КС Σ'_n по k горизонтальных проводников, передающих БП x_1, \dots, x_k а затем выделим в КС Σ'_n непересекающиеся группы, состоящие не более, чем из t соседних расположенных на одной из ее горизонтальных сторон выходов.

2. Для каждой такой группы G , расположенной на нижней границе Σ'_n , и каждого ее выхода y , на которой реализуется БФ h , построим такую КС S , реализующую БФ вида $g(y, x_1, \dots, x_k)$ из представления $f = g(h, x_1, \dots, x_k)$, которая пропускает БП x_1, \dots, x_k сверху вниз, получает вход y с правой вертикальной стороны и отправляет с нее же, но «ниже», чем y , выход z .

3. Освободим справа от группы G вертикальную полосу, в которой друг над другом разместим указанные схемы S для всех ее выходов.

4. Каждый выход y схемы Σ'_n из группы G «опустим» по вертикали до уровня соответствующего ему входа связанной с $y = h$ схемы S и соединим их между собой горизонтальным проводником, после чего выведем на соответствующую вертикаль выход схемы S и объявим его выходом схемы Σ''_n , на котором реализуется БФ $f = g(h, x_1, \dots, x_k)$.

5. Аналогичные преобразования проведем для каждой группы, расположенной на верхней границе Σ'_n .

Полученная описанным выше способом КС Σ''_n будет реализовывать систему БФ $\vec{F}(n)$, а для ее длины и высоты будут выполняться неравенства:

$$\lambda(\Sigma''_n) \leq \lambda(\Sigma'_n) + \left\lceil \frac{|H(n)|}{t} \right\rceil \cdot \lambda_s$$

$$h(\Sigma''_n) \leq h(\Sigma'_n) + 2th_s + 2k,$$

где λ_s и h_s — максимальная длина и высота схем S описанного выше вида.

Применение этого метода дает асимптотически точные верхние оценки для ряда классов БФ, включая класс самодвойственных БФ, который рассмотрен в следующем утверждении.

Теорема 2. *Для класса самодвойственных функций $D(n)$ справедливо неравенство:*

$$A_{E_0}(\vec{D}(n)) \leq 2^{2^{n-1}-1}(n + 9\sqrt{n} + O(1)).$$

Доказательство. Построим схему Σ_n от n переменных, реализующую систему $\vec{D}(n)$. При этом будем использовать схему S_{\oplus} , реализующую сумму по модулю 2 двух переменных так, как показано на рис. 2.

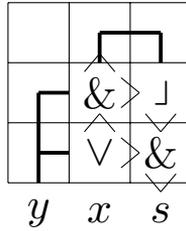


Рис. 2: Пример схемы S_{\oplus} , реализующей сумму по модулю два $s(x, y) = x \oplus y$.

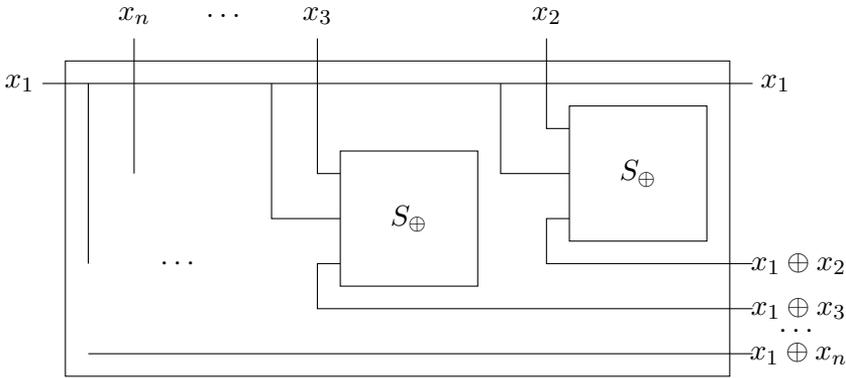


Рис. 3: Вид схемы Σ'_n , реализующей систему БФ $\{x_2 \oplus x_1, \dots, x_n \oplus x_1\}$.

Применяя описанный выше подход, сведем задачу синтеза КС для системы БФ $\vec{D}(n)$, к задаче синтеза КС, реализующей систему $\vec{P}_2(n-1)$. Для этого сопоставим функции $f, f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D(n)$, функцию g из $P_2(n-1)$ так что $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = g(x_1 \oplus x_2, \dots, x_1 \oplus x_n) \oplus x_1$.

Построим сначала КС, реализующую систему БФ

$$\vec{P}_2(x_2 \oplus x_1, \dots, x_n \oplus x_1)$$

в результате горизонтальной стыковки ее подсхем Σ'_n и Σ''_n . Схема Σ'_n состоит из ряда схем S_{\oplus} , каждая из которых принимает на вход переменные x_1 с левой и x_i с верхней стороны, а возвращает $x_i \oplus x_1$, формируя вертикальный ряд из $n-1$ переменных функции g . Длина схемы Σ'_n равна $(n-1)\lambda(S_{\oplus})$, а высота равна $n-1 + h(S_{\oplus})$.

Функции g из $P_2(n-1)$ реализуем универсальным многополюсником Σ''_n из [10], имеющим длину $2^{2^{n-1}-1} + O(\frac{2^{2^{n-1}}}{n})$ и высоту $n + C$. Разобьём её выходы на части G_1, G_2, \dots, G_m , в каждой из которых содержится не

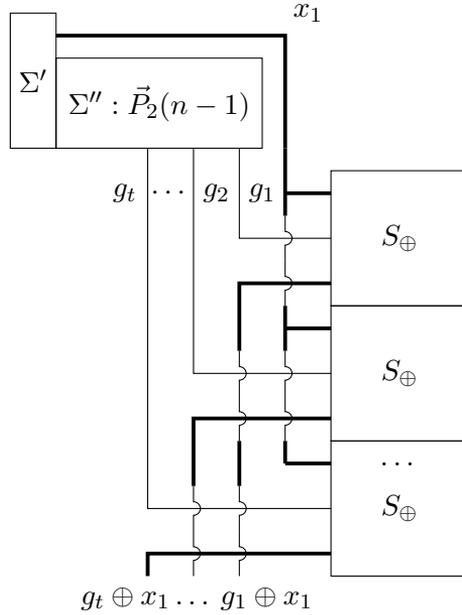


Рис. 4: Вид схемы Σ_n , реализующей систему БФ $\vec{D}(n)$.

более t «соседних» выходов, расположенных на одной из горизонтальных сторон схемы. При этом $m = \lceil 2^{2^{n-1}}/t \rceil$.

Опишем теперь переход от полученной схемы к схеме Σ_n , реализующей $\vec{D}(n)$ в соответствии с изложенным ранее подходом. Продлим все выходы КС Σ''_n вниз, добавив вертикальный ряд, состоящий из схем S_{\oplus} . Каждая схема S_{\oplus} принимает на вход выход y_j схемы G_i по горизонтальному ряду, и x_1 по вертикальному. Выход схемы S_{\oplus} направлен горизонтально, и возвращает результат $y_j \oplus x_1$ в вертикаль y_j . Такая реализация требует дополнительной высоты $h(S_{\oplus})t$ и длины $\lambda(S_{\oplus})$.

Получим размеры схемы Σ_n :

$$\lambda(\Sigma_n) = m(t + \lambda(S_{\oplus})) + n\lambda(S_{\oplus}) = 2^{2^{n-1}-1} + 2^{2^{n-1}-1} \frac{\lambda(S_{\oplus})}{t} + n\lambda(S_{\oplus}) + O(t)$$

$$h(\Sigma_n) = n + 12 + 2th(S_{\oplus}).$$

Возьмем $t = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$, вспомним, что $\lambda(S_{\oplus}) = 3, h(S_{\oplus}) = 3$, и оценим площадь схемы Σ_n следующим образом

$$A(\Sigma_n) = \left(2^{2^{n-1}-1} + 2^{2^{n-1}-1} \frac{3}{\sqrt{n}} + n \right) (n + 12 + 6\sqrt{n}) + O(n\sqrt{n}),$$

то есть выполняется равенство

$$A(\Sigma_n) = n2^{2^{n-1}-1} + 9 \cdot 2^{2^{n-1}-1} \sqrt{n} + 30 \cdot 2^{2^{n-1}-1} + O\left(2^{2^{n-1}-1} \cdot \frac{\sqrt{n}}{n}\right),$$

из которого следует утверждение настоящей теоремы

$$A(\vec{D}(n)) \leq 2^{2^{n-1}-1} (n + 9\sqrt{n} + O(1)).$$

□

Таким образом, следствие 1 из теоремы 1 и теорема 2 устанавливают асимптотическое равенство $A(\vec{D}(n)) \sim n2^{2^{n-1}-1}$, которое было объявлено в [11].

Список литературы

- [1] С. С. Кравцов, “О реализации функций алгебры логики в одном классе схем из функциональных и коммутационных элементов”, *Проблемы кибернетики*, 1967, № 19, 285–292.
- [2] С. А. Ложкин, “Лекции по основам кибернетики. Учебное пособие”, М.: МГУ, 2004.
- [3] Н. А. Шкаликова, “О реализации булевых функций схемами из клеточных элементов”, *Математические вопросы кибернетики*, 1989, № 2, 177–197.
- [4] Г. В. Калачев, “Нижние оценки мощности плоских схем, реализующих частичные булевы операторы”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **18** (2014), 279–322.
- [5] Г. В. Калачев, “Порядок мощности плоских схем, реализующих булевы функции”, *Дискретная математика*, **26**:1 (2014), 49–74.
- [6] Г. В. Калачев, “Об одновременной оптимизации площади, мощности и глубины плоских схем, реализующих частичные булевы операторы”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **20** (2016), 203–266.
- [7] С. А. Ложкин, “Оценки высокой степени точности для сложности управляющих систем из некоторых классов”, *Математические вопросы кибернетики*, 1996, № 6, 189–214.
- [8] С. А. Ложкин, В. С. Зизов, “Уточненные оценки сложности дешифратора в модели клеточных схем из функциональных и коммутационных элементов”, *Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки*, **162**:3 (2020), 322–334. DOI: 10.26907/2541-7746.2020.3.322-334.
- [9] С. А. Ложкин, В. С. Зизов, “Асимптотически точные оценки для площади мультиплексоров в модели клеточных схем”, *Дискретная математика*, **34**:4 (2022), 52–68. DOI: 10.4213/dm1712.
- [10] С. А. Ложкин, В. С. Зизов, “Асимптотические оценки высокой степени точности для сложности универсального многополюсника в модели клеточных схем”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2025, № 4, 61–65. DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-66-4-9.

- [11] С. А. Ложкин, В. С. Зизов, “О сложности реализации универсального клеточного многополосника для класса самодвойственных функций”, *Проблемы теоретической кибернетики: материалы XX Международной научной конференции (Москва, 5-8 декабря 2024)*, ООО МАКС Пресс, Москва, 2025, 79–80. DOI: 10.29003/m4678.978-5-317-07402-9.

Статья поступила 12 февраля 2026 г.

On Certain Approaches to Obtaining Asymptotic Complexity Estimates for the Implementation of Systems of Boolean Functions in the Cellular Circuit Model

S. A. Lozhkin, V. S. Zizov

The paper addresses the problem of asymptotic complexity of implementing systems of Boolean functions in the model of cellular circuits composed of functional and switching elements. The main focus is on deriving high-accuracy asymptotic estimates for the area of cellular circuits realizing sufficiently large classes of Boolean functions. Methods for obtaining upper and lower asymptotic bounds applicable to wide classes of functions are formulated. As a consequence of these methods, high-accuracy asymptotic estimates are obtained for the system of all self-dual Boolean functions. Upper bounds are derived using a constructive approach based on reducing the considered classes of functions to universal multipoles of smaller order and subsequent modification of the corresponding cellular circuits. As a result, matching upper and lower asymptotic bounds on the circuit area are established for the class of self-dual Boolean functions, leading to an asymptotic equality for the order of growth of their implementation complexity in the cellular circuit model.

Keywords: cellular circuits, circuit area, asymptotic bounds, high-accuracy asymptotic bounds, systems of Boolean functions, self-dual functions, universal multipole.

References

- [1] S. S. Kravtsov, “On implementation of Boolean functions in one class of circuits of functional and switching elements”, *Problemy Kibernetiki*, 1967, № 19, 285–292 (In Russian).
- [2] S. A. Lozhkin, *Lectures on the Foundations of Cybernetics. Textbook.*, MSU, Moscow, 2004 (In Russian).
- [3] N. A. Skhalikova, “On implementation of Boolean functions by cellular circuits”, *Matematicheskie Voprosy Kibernetiki*, 1989, № 2, 177–197 (In Russian).

- [4] G. V. Kalachev, “Lower estimates of the power of planar circuits implementing partial Boolean operators”, *Intellektualnye Systemy. Teoria i Prilojenia*, **18** (2014), 279–322 (In Russian).
- [5] G. V. Kalachev, “The power order of planar circuits implementing Boolean functions”, *Discrete Mathematics and Applications*, **26** (2014), 49–74 (In Russian).
- [6] G. V. Kalachev, “On the simultaneous optimization of area, power and depth of planar circuits implementing partial Boolean operators”, *Intellektualnye Systemy. Teoria i Prilojenia*, **20** (2016), 203–266 (In Russian).
- [7] S. A. Lozhkin, “High-precision estimates for the complexity of control systems from some classes”, *Matematicheskie Voprosy Kibernetiki*, 1996, №6, 189–214 (In Russian).
- [8] S. A. Lozhkin, V. S. Zizov, “Refined estimates of the decoder complexity in the model of cellular circuits with functional and switching elements”, *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, **162:3** (2020), 322–334. DOI: 10.26907/2541-7746.2020.3.322-334 (In Russian).
- [9] S. A. Lozhkin, V. S. Zizov, “Asymptotically sharp estimates for the area of multiplexers in the cellular circuit model”, *Discrete Mathematics and Applications*, **34:2** (2024), 103–115. DOI: 10.1515/dma-2024-0009.
- [10] S. A. Lozhkin, V. S. Zizov, “Asymptotic estimates of a high degree of accuracy for the complexity of a universal multipole in a model of cellular circuits”, *Moscow University Mathematics Bulletin*, **80** (2025), 255–260. DOI: 10.3103/S0027132225700500.
- [11] S. A. Lozhkin, V. S. Zizov, “On the complexity of implementing a universal cellular multipole for a class of self-dual functions”, *Problemy Teoreticheskoy Kibernetiki: Proceedings of the XX International Scientific Conference (Moscow, December 5–8, 2024)*, OOO Maks Press, Moscow, 2025, 79–80. DOI: 10.29003/m4678.978-5-317-07402-9 (In Russian).

Received on February 12, 2026