Оценки доли последовательностей с небольшим отклонением от средних значений

В. В. Кочергин*

Рассматривается задача о величине ограничения в k-значном наборе на допустимое отклонение от среднего значения количества разрядов с каждым из k значений при заданной доле таких наборов. Предложен подход, позволяющий отследить на каждом этапе влияние разных параметров на окончательный ответ, а также даны оценки точности приближенного решения.

Ключевые слова: k-значный многомерный куб, формула Стирлинга, доля наборов.

1. Введение

Данная работа является результатом исследований автора, проведенных несколько лет назад по заказу одной из французских фармацевтических компаний и заключающихся в оценке доли k-значных наборов большой длины, в которых количество разрядов с каждым из k значений отличается от среднего значения не более чем на заданную величину.

После истечения срока запрета на обнародование полученных результатов были колебания по вопросу о целесообразности публикации данного материала. С одной стороны, результаты на качественном уровне теоретического значения, в общем, не имеют, так как могут быть достаточно стандартными способами получены применением центральной предельной теоремы к k-значному случайному набору с полиномиальным (или мультиномиальным) распределением (см., например, [1], [2], [3]). С другой стороны, французские заказчики, прекрасно понимая качественную картину, хотели иметь четкое представление о том, какие параметры и в какой степени влияют на точность оценок на каждом этапе. Та настойчивость, с которой заказчики неоднократно просили продолжать исследования именно в этом направлении, дает основания считать, что представленные оценки могут быть интересны при решении практических задач.

* *Кочергин Вадим Васильевич* — зав. каф. дискретной математики мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: `vvkoch@yandex.ru`, ORCID: 0000-0002-7798-9502.

Kochergin Vadim Vasil'evich — Head of Chair of Discrete Mathematics, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics.

Стоит также отметить, что в двузначном случае задача сводится к подсчету числа наборов в средних слоях булева куба, которая нередко встречается в литературе — см., например, [4], [5], [6], а здесь приводится для полноты картины. Аналогичных результатов для общего случая автору найти не удалось.

2. Постановка задачи

Обозначим множество $\{0, 1, \ldots, k-1\}$ через E_k. Для некоторого достаточно большого значения N будем рассматривать последовательности длины N с элементами из множества E_k. Обозначим множество всех таких последовательностей через E_k^N. Множество E_k^N можно также определить как множество всех слов (наборов) длины N над алфавитом E_k. Легко понять, что

$$|E_k^N| = k^N.$$

Для произвольного набора $\tilde{\alpha}$ из множества E_k^N и для каждого $i = 0, 1, \ldots, k-1$ обозначим через $N_i(\tilde{\alpha})$ число разрядов набора $\tilde{\alpha}$, равных i. Очевидно, что

$$N_0(\tilde{\alpha}) + N_1(\tilde{\alpha}) + \ldots + N_{k-1}(\tilde{\alpha}) = N.$$

Далее будем считать, что число N делится на k, т. е. $N = kn$ для некоторого натурального n.

Будем говорить, что *набор $\tilde{\alpha}$ из множества E_k^N удовлетворяет Δ-условию*, если для каждого значения i, $0 \leq i \leq k-1$, выполняются неравенства

$$n - \Delta \leq N_i(\tilde{\alpha}) \leq n + \Delta,$$

где $n = N/k$.

Множество всех наборов из множества E_k^N, удовлетворяющих Δ-условию, обозначим через $E_k^N[\Delta]$.

Введем функцию $\lambda = \lambda(N, k, \Delta)$ равенством

$$\lambda(N, k, \Delta) = \frac{|E_k^N[\Delta]|}{|E_k^N|}.$$

При фиксированных значениях N и k функция $\lambda(N, k, \Delta)$ при изменении целочисленной переменной Δ от 0 до N монотонно возрастает. Следовательно, для любого действительного значения λ из полуинтервала $(0; 1]$ можно корректно определить функцию $\Delta(N, k, \lambda)$, принимающую значения из множества $\{0, 1, \ldots, N\}$, равенством

$$\Delta(N, k, \lambda) = \max\{\nabla \mid \lambda(N, k, \nabla) \leq \lambda\}.$$

Задача: по параметрам N, k и λ определить значение $\Delta(N,k,\lambda)$.

Ключевой момент для решения задачи — умение по параметрам N, k и Δ определять значение $\lambda(N,k,\Delta)$ или, что то же самое, хорошо оценивать величину $|E_k^N[\Delta]|$.

3. Случай $k = 2$

В этом случае, учитывая равенство $N = 2n$, имеем:

$$\lambda(N,2,\Delta) = \frac{|E_2^N[\Delta]|}{|E_2^N|} = \frac{\sum\limits_{t=-\Delta}^{\Delta} C_N^{N/2+t}}{2^N} = \frac{\sum\limits_{t=-\Delta}^{\Delta} C_{2n}^{n+t}}{2^{2n}}.$$

Используя формулу Стирлинга, оценим величину C_{2n}^{n+t} при $n\to\infty$ и $t \le n/2$:

$$\begin{aligned}
C_{2n}^{n+t} &= \frac{(2n)!}{(n+t)!(n-t)!} = \\
&= \frac{\sqrt{2\pi(2n)}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{\sqrt{2\pi(n+t)}\left(\frac{n+t}{e}\right)^{n+t}\sqrt{2\pi(n-t)}\left(\frac{n-t}{e}\right)^{n-t}}(1+o(1)) = \\
&= 2^{2n}\sqrt{\frac{n}{\pi(n+t)(n-t)}}\,\frac{n^{2n}}{(n+t)^{n+t}(n-t)^{n-t}}(1+o(1)) = \\
&= 2^{2n}\sqrt{\frac{n}{\pi(n+t)(n-t)}}(1+o(1))\times \\
&\times \exp\left(2n\ln n-(n+t)\ln\left(n\left(1+\frac{t}{n}\right)\right)-(n-t)\ln\left(n\left(1-\frac{t}{n}\right)\right)\right) = \\
&= 2^{2n}\sqrt{\frac{n}{\pi(n+t)(n-t)}}\,(1+o(1))\times \\
&\times\exp\left(-(n+t)\ln\left(1+\frac{t}{n}\right)-(n-t)\ln\left(1-\frac{t}{n}\right)\right).
\end{aligned}$$

Далее, при дополнительном условии $t = o(n)$ имеем:

$$\begin{aligned}
C_{2n}^{n+t} &= \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}\,(1+o(1))\times \\
&\times\exp\left(-(n+t)\left(\frac{t}{n}-\frac{t^2}{2n^2}+O\left(\frac{t^3}{n^3}\right)\right)-(n-t)\left(-\frac{t}{n}-\frac{t^2}{2n^2}+O\left(\frac{t^3}{n^3}\right)\right)\right) = \\
&= \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}\,(1+o(1))\times
\end{aligned}$$

$$\times \exp\left(-\frac{2t^2}{n}+\frac{t^2}{n}+O\left(\frac{t^3}{n^2}\right)\right)(1+o(1))=\frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}\exp\left(-\frac{t^2}{n}+O\left(\frac{t^3}{n^2}\right)\right).$$

Теперь, дополнительно считая, что выполняется условие $t = o\left(n^{2/3}\right)$, получаем:

$$C_{2n}^{n+t}=\frac{2^{2n}\,e^{-t^2/n}}{\sqrt{\pi n}}\,(1+o(1)).$$

Отметим, что величина $o(1)$ в последней формуле равномерна по t.

Возвращаясь к оценке величины $\lambda(N,2,\Delta)$, имеем:

$$\frac{\sum\limits_{t=-d}^{d} C_{2n}^{n+t}}{2^{2n}}=\frac{2\sum\limits_{t=0}^{d} C_{2n}^{n+t}-C_{2n}^{n}}{2^{2n}}=\frac{1}{\sqrt{\pi n}}\left(2\sum_{t=0}^{d} e^{-t^2/n}-1\right)(1+o(1)).$$

Функция $e^{-t^2/n}$ как функция переменной t монотонно убывает на участке $[0;+\infty)$. Поэтому

$$\sum_{t=1}^{d} e^{-t^2/n}<\int\limits_0^d e^{-t^2/n}dt<\sum_{t=0}^{d-1} e^{-t^2/n}.$$

Следовательно,

$$\int\limits_0^d e^{-t^2/n}dt<\sum_{t=0}^{d} e^{-t^2/n}<\int\limits_0^d e^{-t^2/n}dt+1.$$

Поэтому,

$$\frac{\sum\limits_{t=-d}^{d} C_{2n}^{n+t}}{2^{2n}}=\frac{2}{\sqrt{\pi n}}\left(\int\limits_0^d e^{-t^2/n}dt\right)(1+o(1)).$$

Сделав замену переменной в интеграле, получаем:

$$\int\limits_0^d e^{-t^2/n}dt=\sqrt{n}\int\limits_0^d e^{-(t/\sqrt{n})^2}d\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)=\sqrt{n}\int\limits_0^{d/\sqrt{n}} e^{-x^2}dx.$$

Таким образом, при $\Delta = o(N^{2/3})$ имеем:

$$\lambda(N,2,\Delta)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\frac{\Delta}{\sqrt{n}}} e^{-x^2}dx\,(1+o(1)),$$

где величина последнего интеграла ограничена сверху величиной гауссова интеграла (или интеграла Эйлера — Пуассона)

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx,$$

численно равного $\sqrt{\pi}/2$.

Окончательно, в случае $k=2$ имеем:

1) если выполняется условие

$$\frac{\Delta(N)}{\sqrt{N}} \to 0,$$

то $\lambda(N,2,\Delta(N)) \to 0$;

2) если выполняется условие

$$\frac{\Delta(N)}{\sqrt{N}} \to \infty,$$

то $\lambda(N,2,\Delta(N)) \to 1$;

3) если выполняется условие $\Delta(N) = a\sqrt{N}$, т. е. $\Delta(N) = a\sqrt{2n}$, то

$$\lambda(N,2,\Delta(N)) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,(1+o(1)) \int_{0}^{a\sqrt{2}} e^{-x^2}\,dx.$$

4. Общий случай ($k \geq 2$)

Пусть k — некоторое фиксированное натуральное число не менее 2, $n \to \infty$, $N = kn$.

Тогда

$$\lambda(N,k,\Delta) = \frac{|E_k^N[\Delta]|}{|E_k^N|} = \frac{|E_k^{kn}[\Delta]|}{|E_k^{kn}|} = \frac{\sum P(n_1,n_2,\ldots,n_k)}{k^{kn}},$$

где $P(n_1,n_2,\ldots,n_k)$ — полиномиальный коэффициент, а суммирование ведется по всем наборам вида $(n_1,n_2,\ldots,n_k)$, состоящим из k натуральных чисел и удовлетворяющим условиям:

1) $n_1+n_2+\ldots+n_k = kn$;

2) $|n_i - n| \leq \Delta$ для всех i, $1 \leq i \leq k$.

Используя формулу Стирлинга, оценим при выполнении условия

$$n_1+n_2+\ldots+n_k \to \infty$$

величину полиномиального коэффициента $P(n_1, n_2, \ldots, n_k)$:

$$
\begin{aligned}
P(n_1, n_2, \ldots, n_k) &= C^{n_k}_{n_1+n_2+\ldots+n_k} C^{n_{k-1}}_{n_1+n_2+\ldots+n_{k-1}} \ldots C^{n_2}_{n_1+n_2} = \\
&= \frac{(n_1+n_2+\ldots+n_k)!}{n_1!n_2!\ldots n_k!} = \frac{(kn)!}{n_1!n_2!\ldots n_k!} = \\
&= \frac{\sqrt{2\pi kn}\left(\frac{kn}{e}\right)^{kn}}{\sqrt{2\pi n_1}\left(\frac{n_1}{e}\right)^{n_1}\sqrt{2\pi n_2}\left(\frac{n_2}{e}\right)^{n_2}\ldots\sqrt{2\pi n_k}\left(\frac{n_k}{e}\right)^{n_k}}(1+o(1)) = \\
&= \sqrt{\frac{kn}{(2\pi)^{k-1}n_1n_2\ldots n_k}}\,\frac{(kn)^{kn}}{n_1^{n_1}n_2^{n_2}\ldots n_k^{n_k}}(1+o(1)) = \\
&= \sqrt{\frac{kn}{(2\pi)^{k-1}n_1n_2\ldots n_k}}\,(1+o(1))\times \\
&\times \exp\left(kn\ln(kn) - n_1\ln n_1 - n_2\ln n_2 - \ldots - n_k\ln n_k\right).
\end{aligned}
$$

Пусть дополнительно выполняется условие

$$\max(n_1, n_2, \ldots, n_k) - \min(n_1, n_2, \ldots, n_k) = o(n).$$

Тогда в силу соотношений

$$\min(n_1, n_2, \ldots, n_k) \le \frac{n_1+n_2+\ldots+n_k}{k} = n \le \max(n_1, n_2, \ldots, n_k)$$

для любого i, $1 \le i \le k$, выполняется условие

$$|n - n_i| = o(n).$$

Тогда справедливы следующие соотношения:

$$
\begin{aligned}
n_1n_2\ldots n_k &= (n+n_1-n)(n+n_2-n)\ldots(n+n_k-n) = \\
&= n^k\left(1+\frac{n_1-n}{n}\right)\left(1+\frac{n_2-n}{n}\right)\ldots\left(1+\frac{n_k-n}{n}\right) = \\
&= n^k(1+o(1))(1+o(1))\ldots(1+o(1)) = n^k(1+o(1));
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
n_1\ln n_1 &+ n_2\ln n_2 + \ldots + n_k\ln n_k = \\
&= n_1\ln\left(n\left(1+\frac{n_1-n}{n}\right)\right) + n_2\ln\left(n\left(1+\frac{n_2-n}{n}\right)\right) + \ldots \\
&\ldots + n_k\ln\left(n\left(1+\frac{n_1-n}{n}\right)\right) =
\end{aligned}
$$

$$= kn\ln n + n_1 \ln\left(1 + \frac{n_1 - n}{n}\right) + n_2 \ln\left(1 + \frac{n_2 - n}{n}\right) + \ldots$$
$$\ldots + n_k \ln\left(1 + \frac{n_k - n}{n}\right).$$

Далее, для каждого i, $1 \le i \le k$, верны оценки

$$n_i \ln\left(1 + \frac{n_i - n}{n}\right) = n_i\left(\frac{n_i - n}{n} - \frac{(n_i - n)^2}{2n^2} + O\left(\frac{(n_i - n)^3}{n^3}\right)\right) =$$
$$= (n + (n_i - n))\left(\frac{n_i - n}{n} - \frac{(n_i - n)^2}{2n^2} + O\left(\frac{(n_i - n)^3}{n^3}\right)\right) =$$
$$= (n_i - n) - \frac{(n_i - n)^2}{2n} + \frac{(n_i - n)^2}{n} - \frac{(n_i - n)^3}{2n^2} + O\left(\frac{(n_i - n)^3}{n^2}\right) =$$
$$= (n_i - n) + \frac{(n_i - n)^2}{2n} + O\left(\frac{(n_i - n)^3}{n^2}\right).$$

Таким образом,

$$n_1 \ln n_1 + n_2 \ln n_2 + \ldots + n_k \ln n_k =$$
$$= kn\ln n + (n_1 - n) + \frac{(n_1 - n)^2}{2n} + O\left(\frac{(n_1 - n)^3}{n^2}\right) +$$
$$+ (n_2 - n) + \frac{(n_2 - n)^2}{2n} + O\left(\frac{(n_2 - n)^3}{n^2}\right) + \ldots$$
$$\ldots + (n_k - n) + \frac{(n_k - n)^2}{2n} + O\left(\frac{(n_k - n)^3}{n^2}\right) =$$
$$= kn\ln n + \frac{(n_1 - n)^2}{2n} + \frac{(n_2 - n)^2}{2n} + \ldots + \frac{(n_k - n)^2}{2n} +$$
$$+ O\left(\frac{(\max(n_1, n_2, \ldots, n_k) - \min(n_1, n_2, \ldots, n_k))^3}{n^2}\right).$$

Далее будем считать, что выполняется условие

$$\max(n_1, n_2, \ldots, n_k) - \min(n_1, n_2, \ldots, n_k) = o\left(n^{2/3}\right).$$

Тогда, возвращаясь к оцениванию полиномиального коэффициента, имеем:

$$P(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \sqrt{\frac{kn}{(2\pi)^{k-1} n^k (1 + o(1))}} \times$$
$$\times \exp\left(kn\ln(kn) - kn\ln n - \frac{(n_1 - n)^2}{2n} - \frac{(n_2 - n)^2}{2n} - \ldots -\right.$$

$$-\frac{(n_k-n)^2}{2n}+o(1)\Bigg) =$$

$$= \sqrt{\frac{k}{(2\pi n)^{k-1}}}\ \exp(kn\ln k)\,(1+o(1))\times$$

$$\times\exp\left(-\frac{(n_1-n)^2}{2n}-\frac{(n_2-n)^2}{2n}-\ldots-\frac{(n_k-n)^2}{2n}\right)=$$

$$=\sqrt{\frac{k}{(2\pi n)^{k-1}}}\,k^{kn}\,\exp\left(-\frac{(n_1-n)^2}{2n}-\frac{(n_2-n)^2}{2n}-\ldots-\frac{(n_k-n)^2}{2n}\right)\cdot$$

$$\cdot(1+o(1))=$$

$$=\sqrt{\frac{k}{(2\pi n)^{k-1}}}\,k^{kn}\,e^{-((n_1-n)^2+(n_2-n)^2+\ldots+(n_k-n)^2)/(2n)}(1+o(1)).$$

Теперь нужно оценить величину

$$\sum\exp\left\{\frac{-((n_1-n)^2+(n_2-n)^2+\ldots+(n_k-n)^2)}{2n}\right\},$$

где сумма берется по всем наборам вида $(n_1,n_2,\ldots,n_k)$, состоящим из k натуральных чисел и удовлетворяющим условиям:

1) $n_1+n_2+\ldots+n_k=kn$;

2) $|n_i-n|\le\Delta$ для всех i, $1\le i\le k$.

Эту сумму можно переписать следующим образом:

$$\sum_{(t_1,\ldots,t_{k-1})\in\mathcal{D}}\exp\left\{\frac{-\left(t_1^2+t_2^2+\ldots+t_{k-1}^2+(-t_1-t_2-\ldots-t_{k-1})^2\right)}{2n}\right\},$$

где суммирование ведется по всем целочисленным наборам $(t_1,\ldots,t_{k-1})$, лежащим в области $\mathcal{D}$ пространства размерности $k-1$, определяемой следующим образом:

$$-\Delta\le t_i\le\Delta,\quad i=1,\ldots k-1;$$
$$-\Delta\le t_1+t_2+\ldots+t_{k-1}\le\Delta.$$

Последнюю сумму, в свою очередь, можно выразить через кратный интеграл

$$\sum_{(t_1,\ldots,t_{k-1})\in\mathcal{D}}\exp\left\{\frac{-\left(t_1^2+t_2^2+\ldots+t_{k-1}^2+(-t_1-t_2-\ldots-t_{k-1})^2\right)}{2n}\right\}=$$

$$= (1+o(1)) \iint\limits_{\mathcal{D}} \ldots \int e^{-\frac{t_1^2+t_2^2+\ldots+t_{k-1}^2+(-t_1-t_2-\ldots-t_{k-1})^2}{2n}}\, dt_1\, dt_2\, \ldots\, dt_{k-1}.$$

Для оценки последнего кратного интеграла путем сведения его к одномерному гауссову интегралу (или интегралу Эйлера — Пуассона) преобразуем выражение в показателе экспоненты.

Воспользуемся следующим равенством, которое проверяется непосредственно

$$\left(\frac{p+1}{2p}\right)\sum_{i=p}^{q} t_i^2 + \left(\frac{1}{p}\right)\sum_{p\le i<j\le q} t_i t_j =$$
$$= \left(\frac{p+1}{2p}\right)\left(t_p + \frac{1}{p+1}t_{p+1} + \ldots + \frac{1}{p+1}t_q\right)^2 +$$
$$+ \left(\frac{p+2}{2(p+1)}\right)\sum_{i=p+1}^{q} t_i^2 + \left(\frac{1}{p+1}\right)\sum_{p+1\le i<j\le q} t_i t_j.$$

Последовательно для $p = 1, 2, \ldots, k-2$ применяя установленное равенство (при $q = k-1$), получаем

$$\frac{1}{2}\left(t_1^2 + t_2^2 + \ldots + t_{k-1}^2 + (-t_1 - t_2 - \ldots - t_{k-1})^2\right) = \sum_{i=1}^{k-1} t_i^2 + \sum_{1\le i<j\le k-1} t_i t_j =$$
$$= \sum_{p=1}^{k-2}\left(\frac{p+1}{2p}\left(t_p + \frac{1}{p+1}t_{p+1} + \ldots + \frac{1}{p+1}t_{k-1}\right)^2\right) + \frac{k}{2(k-1)}t_{k-1}^2.$$

Оценим кратный интеграл по $(k-1)$-мерному параллелепипеду (этот параллелепипед может как содержаться в области $\mathcal{D}$, так и содержать область $\mathcal{D}$):

$$\int_{-D}^{D}\int_{-D}^{D} \ldots \int_{-D}^{D} e^{-\frac{t_1^2+t_2^2+\ldots+t_{k-1}^2+(-t_1-t_2-\ldots-t_{k-1})^2}{2n}}\, dt_1\, dt_2\, \ldots\, dt_{k-1} =$$
$$= \int_{-D}^{D}\int_{-D}^{D} \ldots \int_{-D}^{D} e^{-\left(\frac{1}{n}\right)\frac{t_1^2+t_2^2+\ldots+t_{k-1}^2+(-t_1-t_2-\ldots-t_{k-1})^2}{2}}\, dt_1\, dt_2\, \ldots\, dt_{k-1} =$$
$$= \int_{-D}^{D}\int_{-D}^{D} \ldots \int_{-D}^{D} \exp\left\{-\left(\frac{1}{n}\right)\left(\sum_{p=1}^{k-2}\left(\frac{p+1}{2p}\left(t_p + \frac{1}{p+1}t_{p+1} + \ldots\right.\right.\right.\right.$$

$$\ldots + \left.\left.\left.\frac{1}{p+1}t_{k-1}\right)^2\right) + \frac{k}{2(k-1)}t_{k-1}^2\right)\right\} dt_1\, dt_2\, \ldots\, dt_{k-1}.$$

В последнем интеграле сделаем замену переменных:

$$\begin{aligned}
x_1 &= t_1 + \frac{t_2}{2} + \ldots + \frac{t_{k-1}}{2},\\
x_2 &= t_2 + \frac{t_3}{3} + \ldots + \frac{t_{k-1}}{3},\\
&\ldots\\
x_p &= t_p + \frac{t_{p+1}}{p+1} + \ldots + \frac{t_{k-1}}{p+1},\\
&\ldots\\
x_{k-2} &= t_{k-2} + \frac{t_{k-1}}{k-1},\\
x_{k-1} &= t_{k-1}.
\end{aligned}$$

Якобиан этого преобразования равен 1, а следовательно и якобиан обратного преобразования равен 1. Поэтому

$$\int\limits_{-D}^{D}\int\limits_{-D}^{D}\ldots\int\limits_{-D}^{D} \exp\left\{-\left(\frac{1}{n}\right)\left(\sum_{p=1}^{k-2}\left(\frac{p+1}{2p}\left(t_p + \frac{1}{p+1}t_{p+1} + \ldots\right.\right.\right.\right.$$

$$\ldots + \left.\left.\left.\left.\frac{1}{p+1}t_{k-1}\right)^2\right) + \frac{k}{2(k-1)}t_{k-1}^2\right)\right\} dt_1\, dt_2\, \ldots\, dt_{k-1} =$$

$$= \int\limits_{-\frac{kD}{2}}^{\frac{kD}{2}}\int\limits_{-\frac{kD}{3}}^{\frac{kD}{3}}\ldots\int\limits_{-\frac{kD}{k-1}}^{\frac{kD}{k-1}}\int\limits_{-D}^{D} \exp\left\{-\frac{1}{n}\left(\sum_{p=1}^{k-1}\frac{p+1}{2p}x_p^2\right)\right\} dx_1\, dx_2\, \ldots\, dx_{k-2}\, dx_{k-1}.$$

Сделаем еще одну замену:

$$y_p = \sqrt{\frac{p+1}{2pn}}x_p, \quad p = 1, 2, \ldots k-1.$$

Якобиан I обратного преобразования вычисляется следующим образом:

$$I = \prod_{p=1}^{k-1}\sqrt{\frac{2pn}{p+1}} = \sqrt{(2n)^{k-1}}\sqrt{\frac{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot (k-2)(k-1)}{2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (k-1)k}} = \sqrt{\frac{(2n)^{k-1}}{k}}.$$

Поэтому

$$\int\limits_{-\frac{kD}{2}}^{\frac{kD}{2}} \int\limits_{-\frac{kD}{3}}^{\frac{kD}{3}} \ldots \int\limits_{-\frac{kD}{k-1}}^{\frac{kD}{k-1}} \int\limits_{-D}^{D} e^{-\left(\frac{1}{n}\right)\left(\sum_{p=1}^{k-1} \frac{p+1}{2p} x_p^2\right)}\, dx_1\, dx_2\, \ldots\, dx_{k-2}\, dx_{k-1} =$$

$$= \sqrt{\frac{(2n)^{k-1}}{k}} \int\limits_{-\frac{kD}{2\sqrt{n}}}^{\frac{kD}{2\sqrt{n}}} \int\limits_{-\frac{kD}{\sqrt{12n}}}^{\frac{kD}{\sqrt{12n}}} \ldots \int\limits_{-\frac{kD}{\sqrt{2(k-2)(k-1)n}}}^{\frac{kD}{\sqrt{2(k-2)(k-1)n}}} \int\limits_{-\frac{\sqrt{k}D}{\sqrt{2(k-1)n}}}^{\frac{\sqrt{k}D}{\sqrt{2(k-1)n}}} \exp\left\{-\left(y_1^2 + y_2^2 + \ldots\right.\right.$$

$$\left.\left.\ldots + y_{k-2}^2 + y_{k-1}^2\right)\right\} dy_1\, dy_2\, \ldots\, dy_{k-2}\, dy_{k-1} =$$

$$= \sqrt{\frac{(2n)^{k-1}}{k}} \left(\prod_{p=1}^{k-1} \int\limits_{-\frac{kD}{\sqrt{2p(p+1)n}}}^{\frac{kD}{\sqrt{2p(p+1)n}}} e^{-y_p^2}\, dy_p \right).$$

Таким образом, окончательно получаем такое равенство для исследуемого интеграла:

$$\int\limits_{-D}^{D} \int\limits_{-D}^{D} \ldots \int\limits_{-D}^{D} e^{-\frac{t_1^2 + t_2^2 + \ldots + t_{k-1}^2 + (-t_1 - t_2 - \ldots - t_{k-1})^2}{2n}}\, dt_1\, dt_2\, \ldots\, dt_{k-1} =$$

$$= \sqrt{\frac{(2n)^{k-1}}{k}} \left(\prod_{p=1}^{k-1} \int\limits_{-\frac{kD}{\sqrt{2p(p+1)n}}}^{\frac{kD}{\sqrt{2p(p+1)n}}} e^{-y_p^2}\, dy_p \right).$$

Полученные оценки позволяют сделать следующие выводы.

Утверждение 1. *Пусть выполняется условие*

$$\frac{\Delta(N)}{N^{2/3}} \to 0.$$

Тогда

$$\lambda(N, k, \Delta(N)) = \sqrt{\frac{k}{(2\pi n)^{k-1}}}\, (1 + o(1)) \times$$

$$\times \iint\limits_{\mathcal{D}} \ldots \int e^{-\left(t_1^2 + t_2^2 + \ldots + t_{k-1}^2 + (-t_1 - t_2 - \ldots - t_{k-1})^2\right)/(2n)}\, dt_1\, dt_2\, \ldots\, dt_{k-1},$$

где область $\mathcal{D}$ пространства размерности $k-1$, по которой берется кратный интеграл, определяется следующим образом:

$$-\Delta(N) \le t_i \le \Delta(N), \quad i = 1, \dots k-1;$$
$$-\Delta(N) \le t_1 + t_2 + \ldots + t_{k-1} \le \Delta(N).$$

Доказательство. В условиях утверждения 1 имеем

$$\lambda(N, k, \Delta(N)) = \frac{\sum\limits_{(n_1,\ldots,n_k) \text{ удовл. } \Delta-\text{ усл.}} P(n_1, n_2, \ldots, n_k)}{k^{kn}} =$$
$$= \sqrt{\frac{k}{(2\pi n)^{k-1}}}\,(1+o(1))\times$$
$$\times \sum_{(n_1,\ldots,n_k) \text{ удовл. } \Delta-\text{ усл.}} e^{-\frac{((n_1-n)^2+(n_2-n)^2+\ldots+(n_{k-1}-n)^2+(-(n_1-n)-\ldots-(n_{k-1}-n))^2)}{(2n)}} =$$
$$= \sqrt{\frac{k}{(2\pi n)^{k-1}}}\,(1+o(1))\times$$
$$\times \iint\limits_{\mathcal{D}}\ldots\int e^{-\left(t_1^2+t_2^2+\ldots+t_{k-1}^2+(-t_1-t_2-\ldots-t_{k-1})^2\right)/(2n)}\,dt_1\,dt_2\,\ldots\,dt_{k-1}.$$

Утверждение 1 доказано. □

Утверждение 2. *Пусть выполняется условие*

$$\frac{\Delta(N)}{\sqrt{N}} \to 0.$$

Тогда

$$\lambda(N, k, \Delta(N)) \to 0.$$

Доказательство. В условиях утверждения 2 имеем

$$\lambda(N, k, \Delta(N)) = \frac{\sum\limits_{(n_1,\ldots,n_k) \text{ удовл. } \Delta-\text{ усл.}} P(n_1, n_2, \ldots, n_k)}{k^{kn}} =$$
$$= \frac{\sum\limits_{(n_1,\ldots,n_k) \text{ удовл. } \Delta-\text{ усл.}} \sqrt{\frac{k}{(2\pi n)^{k-1}}}\,k^{kn}\,e^{-\frac{(n_1-n)^2+\ldots+(n_k-n)^2}{2n}}(1+o(1))}{k^{kn}} =$$
$$= \sqrt{\frac{k}{(2\pi n)^{k-1}}}\,(1+o(1))\times$$

$$\times \sum_{(n_1,\ldots,n_k)\text{ удовл. } \Delta-\text{ усл.}} e^{-\frac{(n_1-n)^2+\ldots+(n_{k-1}-n)^2+(-(n_1-n)-\ldots-(n_{k-1}-n))^2}{2n}} \le$$

$$\le \sqrt{\frac{k}{(2\pi n)^{k-1}}}\,(1+o(1))\times$$

$$\times \int\limits_{-\Delta}^{\Delta}\int\limits_{-\Delta}^{\Delta}\ldots\int\limits_{-\Delta}^{\Delta} e^{-\left(t_1^2+t_2^2+\ldots+t_{k-1}^2+(-t_1-t_2-\ldots-t_{k-1})^2\right)/(2n)}\,dt_1\,dt_2\,\ldots\,dt_{k-1} =$$

$$= \sqrt{\frac{k}{(2\pi n)^{k-1}}}\sqrt{\frac{(2n)^{k-1}}{k}}\left(\prod_{p=1}^{k-1}\int\limits_{-\frac{k\Delta}{\sqrt{2p(p+1)n}}}^{\frac{k\Delta}{\sqrt{2p(p+1)n}}} e^{-y_p^2}\,dy_p\right)(1+o(1)) \le$$

$$\le \frac{1}{\sqrt{\pi^{k-1}}}\left(\prod_{p=1}^{k-1}\frac{2k\Delta}{\sqrt{2p(p+1)n}}\right)(1+o(1)) = o(1).$$

Утверждение 2 доказано. □

Утверждение 3. *Пусть выполняется условие*

$$\frac{\sqrt{N}}{\Delta(N)} \to 0.$$

Тогда

$$\lambda(N,k,\Delta(N)) \to 1.$$

Доказательство. Так как условие $\Delta_1 \ge \Delta_2$ влечет за собой неравенство

$$\lambda(N,k,\Delta_1) \ge \lambda(N,k,\Delta_2),$$

то достаточно доказать утверждение в случае, когда выполняется условие

$$\Delta(N) = o\left(N^{2/3}\right).$$

Тогда, используя равенство

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}d\,x = \sqrt{\pi}$$

для значения гауссового интеграла, имеем

$$\lambda(N,k,\Delta(N)) =$$

$$= \sqrt{\frac{k}{(2\pi n)^{k-1}}}\,(1+o(1))\times$$

$$\times \sum_{(n_1,\dots,n_k)\ \text{удовл. } \Delta-\ \text{усл.}} e^{-\frac{(n_1-n)^2+(n_2-n)^2+\ldots+(n_{k-1}-n)^2+(-(n_1-n)-\ldots-(n_{k-1}-n))^2}{2n}} \geq$$

$$\geq \sqrt{\frac{k}{(2\pi n)^{k-1}}}\,(1+o(1))\times$$

$$\times \int\limits_{-\frac{\Delta}{k}}^{\frac{\Delta}{k}} \int\limits_{-\frac{\Delta}{k}}^{\frac{\Delta}{k}} \ldots \int\limits_{-\frac{\Delta}{k}}^{\frac{\Delta}{k}} e^{-\frac{t_1^2+t_2^2+\ldots+t_{k-1}^2+(-t_1-t_2-\ldots-t_{k-1})^2}{2n}}\,dt_1\,dt_2\,\ldots\,dt_{k-1} =$$

$$= \sqrt{\frac{k}{(2\pi n)^{k-1}}}\sqrt{\frac{(2n)^{k-1}}{k}}\left(\prod_{p=1}^{k-1}\int\limits_{-\frac{k\Delta}{\sqrt{2p(p+1)n}}}^{\frac{k\Delta}{\sqrt{2p(p+1)n}}} e^{-y_p^2}\,dy_p\right)(1+o(1)) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi^{k-1}}}\left(\prod_{p=1}^{k-1}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-y_p^2}\,dy_p + o(1)\right)\right)(1+o(1)) =$$

$$= \frac{(\sqrt{\pi})^{k-1}}{\sqrt{\pi^{k-1}}}(1+o(1)) = 1+o(1).$$

Утверждение 3 доказано. □

5. Грубая оценка погрешности вычислений, общий случай ($k \geq 2$)

Ко всем условиям, в рамках которых велись рассуждения в разделе 4, добавим условие

$$\Delta(N) = a\sqrt{n}.$$

Оценим погрешность вычисления значения $\lambda(N, k, \Delta(N))$ по формуле из утверждения 1, т. е. оценим величину остаточного члена вида $o(1)$ из этой формулы. Для этого асимптотические неравенства из выкладок раздела 3, использующие o-символику, заменим на обычные неравенства. При этом придется отдельно выписывать оценки снизу и сверху.

Формулу Стирлинга будем использовать в следующем виде

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \exp\frac{\alpha(n)}{12n},$$

где при всех натуральных n выполняется неравенство $0 < \alpha(n) < 1$.

Используя указанную форму формулы Стирлинга, получаем такую оценку полиномиального коэффициента $P(n_1, n_2, \dots, n_k)$:

$$P(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{(kn)!}{n_1! n_2! \dots n_k!} =$$
$$= \frac{\sqrt{2\pi kn}\left(\frac{kn}{e}\right)^{kn} e^{\frac{\alpha(kn)}{12kn}}}{\sqrt{2\pi n_1}\left(\frac{n_1}{e}\right)^{n_1} e^{\frac{\alpha(n_1)}{12n_1}} \sqrt{2\pi n_2}\left(\frac{n_2}{e}\right)^{n_2} e^{\frac{\alpha(n_2)}{12n_2}} \dots \sqrt{2\pi n_k}\left(\frac{n_k}{e}\right)^{n_k} e^{\frac{\alpha(n_k)}{12n_k}}} =$$
$$= \sqrt{\frac{kn}{(2\pi k)^{k-1} n^k}} \sqrt{\frac{n^k}{n_1 n_2 \dots n_k}} \frac{(kn)^{kn}}{n_1^{n_1} n_2^{n_2} \dots n_k^{n_k}} \times$$
$$\times \exp\left\{\frac{\alpha(kn)}{12kn} - \frac{\alpha(n_1)}{12n_1} - \frac{\alpha(n_2)}{12n_2} - \dots - \frac{\alpha(n_k)}{12n_k}\right\} =$$
$$= \sqrt{\frac{k}{(2\pi kn)^{k-1}}} \sqrt{\frac{n^k}{n_1 n_2 \dots n_k}} \times$$
$$\times \exp\left(kn \ln(kn) - n_1 \ln n_1 - n_2 \ln n_2 - \dots - n_k \ln n_k\right) \times$$
$$\times \exp\left\{\frac{\alpha(kn)}{12kn} - \frac{\alpha(n_1)}{12n_1} - \frac{\alpha(n_2)}{12n_2} - \dots - \frac{\alpha(n_k)}{12n_k}\right\}.$$

Отдельно оценим второй, третий и четвертый множители.

Второй множитель. В силу равенств

$$n_1 n_2 \dots n_k = (n + n_1 - n)(n + n_2 - n) \dots (n - n_k - n) =$$
$$= n^k \left(1 + \frac{n_1 - n}{n}\right)\left(1 + \frac{n_2 - n}{n}\right) \dots \left(1 + \frac{n_k - n}{n}\right)$$

и учитывая, что для всех i, $1 \le i \le k$, выполняются соотношения $|n_i - n| \le \Delta = a\sqrt{n}$, имеем:

$$n^k \left(1 - \frac{a\sqrt{n}}{n}\right)^k \le n_1 n_2 \dots n_k \le n^k \left(1 + \frac{a\sqrt{n}}{n}\right)^k.$$

Поэтому

$$\sqrt{\frac{n^k}{n_1 n_2 \dots n_k}} \le \left(1 - \frac{a\sqrt{n}}{n}\right)^{-\frac{k}{2}} = \exp\left\{-\frac{k}{2} \ln\left(1 - \frac{a\sqrt{n}}{n}\right)\right\} \le$$
$$\le \exp\left\{-\frac{k}{2}\left(-\frac{a\sqrt{n}}{n} + \frac{(a\sqrt{n})^2}{2n^2}\right)\right\} = \exp\left\{\frac{ak}{2\sqrt{n}} - \frac{a^2 k}{4n}\right\};$$

$$\sqrt{\frac{n^k}{n_1 n_2 \ldots n_k}} \geq \left(1 + \frac{a\sqrt{n}}{n}\right)^{-\frac{k}{2}} =$$
$$= \exp\left\{-\frac{k}{2}\ln\left(1 + \frac{a\sqrt{n}}{n}\right)\right\} \geq \exp\left\{-\frac{ak}{2\sqrt{n}}\right\};$$

Третий множитель. Сначала в отрицательных слагаемых показателя экспоненты этого множителя выделим слагаемое $-kn\ln n$:

$$n_1 \ln n_1 + n_2 \ln n_2 + \ldots + n_k \ln n_k =$$
$$= n_1 \ln\left(n\left(1 + \frac{n_1 - n}{n}\right)\right) + n_2 \ln\left(n\left(1 + \frac{n_2 - n}{n}\right)\right) + \ldots$$
$$\ldots + n_k \ln\left(n\left(1 + \frac{n_1 - n}{n}\right)\right) =$$
$$= kn\ln n + n_1 \ln\left(1 + \frac{n_1 - n}{n}\right) + n_2 \ln\left(1 + \frac{n_2 - n}{n}\right) + \ldots$$
$$\ldots + n_k \ln\left(1 + \frac{n_1 - n}{n}\right).$$

Далее, для каждого i, $1 \leq i \leq k$, верны оценки

$$n_i \ln\left(1 + \frac{n_i - n}{n}\right) \leq n_i\left(\frac{n_i - n}{n} - \frac{(n_i - n)^2}{2n^2} + \frac{(n_i - n)^3}{3n^3}\right) =$$
$$= (n + (n_i - n))\left(\frac{n_i - n}{n} - \frac{(n_i - n)^2}{2n^2} + \frac{(n_i - n)^3}{3n^3}\right) =$$
$$= (n_i - n) + \frac{(n_i - n)^2}{n} - \frac{(n_i - n)^2}{2n} - \frac{(n_i - n)^3}{2n^2} + \frac{(n_i - n)^3}{3n^2} + \frac{(n_i - n)^4}{3n^3} =$$
$$= (n_i - n) + \frac{(n_i - n)^2}{2n} + \frac{(n_i - n)^3}{n^2}\left(-\frac{1}{6} + \frac{n_i - n}{3n}\right) \leq$$
$$\leq (n_i - n) + \frac{(n_i - n)^2}{2n} - \frac{(n_i - n)^3}{7n^2};$$

$$n_i \ln\left(1 + \frac{n_i - n}{n}\right) \geq n_i\left(\frac{n_i - n}{n} - \frac{(n_i - n)^2}{2n^2}\right) =$$
$$= (n + (n_i - n))\left(\frac{n_i - n}{n} - \frac{(n_i - n)^2}{2n^2}\right) =$$
$$= (n_i - n) + \frac{(n_i - n)^2}{n} - \frac{(n_i - n)^2}{2n} - \frac{(n_i - n)^3}{2n^2} =$$
$$= (n_i - n) + \frac{(n_i - n)^2}{2n} - \frac{(n_i - n)^3}{2n^2}.$$

Таким образом,

$$
\begin{aligned}
&n_1\ln n_1+n_2\ln n_2+\ldots+n_k\ln n_k\le\\
&\qquad\le kn\ln n+(n_1-n)+\frac{(n_1-n)^2}{2n}-\frac{(n_1-n)^3}{7n^2}+\\
&+(n_2-n)+\frac{(n_2-n)^2}{2n}-\frac{(n_2-n)^3}{7n^2}+\ldots+(n_k-n)+\frac{(n_k-n)^2}{2n}-\frac{(n_k-n)^3}{7n^2}=\\
&\qquad=kn\ln n+\frac{(n_1-n)^2+(n_2-n)^2+\ldots+(n_k-n)^2}{2n}-\\
&\qquad\qquad-\frac{(n_1-n)^3+(n_2-n)^3+\ldots+(n_k-n)^3}{7n^2};
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&n_1\ln n_1+n_2\ln n_2+\ldots+n_k\ln n_k\ge\\
&\qquad\ge kn\ln n+(n_1-n)+\frac{(n_1-n)^2}{2n}-\frac{(n_1-n)^3}{2n^2}+\\
&+(n_2-n)+\frac{(n_2-n)^2}{2n}-\frac{(n_2-n)^3}{2n^2}+\ldots+(n_k-n)+\frac{(n_k-n)^2}{2n}-\frac{(n_k-n)^3}{2n^2}=\\
&\qquad=kn\ln n+\frac{(n_1-n)^2+(n_2-n)^2+\ldots+(n_k-n)^2}{2n}-\\
&\qquad\qquad-\frac{(n_1-n)^3+(n_2-n)^3+\ldots+(n_k-n)^3}{2n^2}.
\end{aligned}
$$

Следовательно,

$$
\begin{aligned}
&\exp\left(kn\ln(kn)-n_1\ln n_1-n_2\ln n_2-\ldots-n_k\ln n_k\right)\le\\
&\qquad\le k^{kn}\exp\left\{-\frac{(n_1-n)^2+(n_2-n)^2+\ldots+(n_k-n)^2}{2n}\right\}\times\\
&\qquad\quad\times\exp\left\{\frac{(n_1-n)^3+(n_2-n)^3+\ldots+(n_k-n)^3}{2n^2}\right\}\le\\
&\quad\le k^{kn}\exp\left\{-\frac{(n_1-n)^2+(n_2-n)^2+\ldots+(n_k-n)^2}{2n}\right\}\exp\left\{\frac{ka^3}{2\sqrt{n}}\right\};
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\exp\left(kn\ln(kn)-n_1\ln n_1-n_2\ln n_2-\ldots-n_k\ln n_k\right)\ge\\
&\qquad\ge k^{kn}\exp\left\{-\frac{(n_1-n)^2+(n_2-n)^2+\ldots+(n_k-n)^2}{2n}\right\}\times\\
&\qquad\quad\times\exp\left\{\frac{(n_1-n)^3+(n_2-n)^3+\ldots+(n_k-n)^3}{7n^2}\right\}\ge
\end{aligned}
$$

$$\geq k^{kn} \exp\left\{-\frac{(n_1-n)^2+(n_2-n)^2+\ldots+(n_k-n)^2}{2n}\right\} \exp\left\{\frac{ka^3}{7\sqrt{n}}\right\}.$$

Четвертый множитель. Справедливы следующие оценки:

$$\exp\left\{\frac{\alpha(kn)}{12kn}-\frac{\alpha(n_1)}{12n_1}-\frac{\alpha(n_2)}{12n_2}-\ldots-\frac{\alpha(n_k)}{12n_k}\right\} \leq \exp\left\{\frac{1}{12kn}\right\};$$

$$\exp\left\{\frac{\alpha(kn)}{12kn}-\frac{\alpha(n_1)}{12n_1}-\frac{\alpha(n_2)}{12n_2}-\ldots-\frac{\alpha(n_k)}{12n_k}\right\} \geq$$
$$\geq \exp\left\{-\frac{k}{12(n-a\sqrt{n})}\right\} \geq \exp\left\{-\frac{k}{12n}\left(1+\frac{2a}{\sqrt{n}}\right)\right\}.$$

Возвращаясь к оцениванию полиномиального коэффициента, применяем полученные оценки множителей:

$$P(n_1,n_2,\ldots,n_k) =$$

$$= \sqrt{\frac{k}{(2\pi kn)^{k-1}}}\,\sqrt{\frac{n^k}{n_1 n_2 \ldots n_k}}\; e^{kn\ln(kn)-n_1\ln n_1-n_2\ln n_2-\ldots-n_k\ln n_k}\times$$
$$\times \exp\left\{\frac{\alpha(kn)}{12kn}-\frac{\alpha(n_1)}{12n_1}-\frac{\alpha(n_2)}{12n_2}-\ldots-\frac{\alpha(n_k)}{12n_k}\right\} \leq$$
$$\leq \sqrt{\frac{k}{(2\pi kn)^{k-1}}}\; k^{kn}\exp\left\{\frac{ak}{2\sqrt{n}}-\frac{a^2k}{4n}\right\}\;\exp\left\{\frac{ka^3}{2\sqrt{n}}\right\}\;\exp\left\{\frac{1}{12kn}\right\}\;\times$$
$$\times \exp\left\{-\frac{(n_1-n)^2+(n_2-n)^2+\ldots+(n_k-n)^2}{2n}\right\} \leq$$
$$\leq \sqrt{\frac{k}{(2\pi kn)^{k-1}}}\; k^{kn}\exp\left\{-\frac{(n_1-n)^2+(n_2-n)^2+\ldots+(n_k-n)^2}{2n}\right\}\;\times$$
$$\times\;\exp\left\{\frac{ka(1+a^2)+\varepsilon}{2\sqrt{n}}\right\};$$

$$P(n_1,n_2,\ldots,n_k) =$$

$$= \sqrt{\frac{k}{(2\pi kn)^{k-1}}}\,\sqrt{\frac{n^k}{n_1 n_2 \ldots n_k}}\; e^{kn\ln(kn)-n_1\ln n_1-n_2\ln n_2-\ldots-n_k\ln n_k}\times$$
$$\times \exp\left\{\frac{\alpha(kn)}{12kn}-\frac{\alpha(n_1)}{12n_1}-\frac{\alpha(n_2)}{12n_2}-\ldots-\frac{\alpha(n_k)}{12n_k}\right\} \geq$$

$$\geq \sqrt{\frac{k}{(2\pi kn)^{k-1}}}\; k^{kn} \exp\left\{-\frac{ak}{2\sqrt{n}}\right\} \exp\left\{\frac{ka^3}{7\sqrt{n}}\right\} \exp\left\{-\frac{k}{n}\left(1+\frac{2a}{\sqrt{n}}\right)\right\} \times$$
$$\times \exp\left\{-\frac{(n_1-n)^2+(n_2-n)^2+\ldots+(n_k-n)^2}{2n}\right\} \geq$$
$$\geq \sqrt{\frac{k}{(2\pi kn)^{k-1}}}\; k^{kn} \exp\left\{-\frac{(n_1-n)^2+(n_2-n)^2+\ldots+(n_k-n)^2}{2n}\right\} \times$$
$$\times \exp\left\{-\frac{ka(7-2a^2)+\varepsilon}{14\sqrt{n}}\right\}.$$

Обозначим через $\mathcal{D}$ область пространства размерности $k-1$, определяемой следующим образом:

$$-\Delta \leq t_i \leq \Delta, \quad i=1,\ldots k-1;$$
$$-\Delta \leq t_1+t_2+\ldots+t_{k-1} \leq \Delta.$$

При суммированиях нас будут интересовать точки $(t_1, t_2, \ldots, t_{k-1})$ области $\mathcal{D}$ с целочисленными координатами.

Так как

$$\lambda(N,k,\Delta) = \frac{1}{k^{kn}}\left(\sum_{(t_1,\ldots,t_{k-1})\in\mathcal{D}} P(t_1,t_2,\ldots,t_{k-1},-t_1-t_2-\ldots-t_{k-1})\right),$$

то справедливы неравенства

$$\lambda(N,k,\Delta) \leq \sqrt{\frac{k}{(2\pi kn)^{k-1}}}\; \exp\left\{\frac{ka(1+a^2)+\varepsilon}{2\sqrt{n}}\right\} \times$$
$$\times \sum_{(t_1,\ldots,t_{k-1})\in\mathcal{D}} \exp\left\{\frac{-\left(t_1^2+t_2^2+\ldots+t_{k-1}^2+(-t_1-t_2-\ldots-t_{k-1})^2\right)}{2n}\right\};$$

$$\lambda(N,k,\Delta) \geq \sqrt{\frac{k}{(2\pi kn)^{k-1}}}\; \exp\left\{-\frac{ka(7-2a^2)+\varepsilon}{14\sqrt{n}}\right\} \times$$
$$\times \sum_{(t_1,\ldots,t_{k-1})\in\mathcal{D}} \exp\left\{\frac{-\left(t_1^2+t_2^2+\ldots+t_{k-1}^2+(-t_1-t_2-\ldots-t_{k-1})^2\right)}{2n}\right\}.$$

Оценим величину

$$\sum_{(t_1,\ldots,t_{k-1})\in\mathcal{D}} \exp\left\{\frac{-\left(t_1^2+t_2^2+\ldots+t_{k-1}^2+(-t_1-t_2-\ldots-t_{k-1})^2\right)}{2n}\right\}$$

через кратный интеграл

$$\iint\limits_{\mathcal{D}} \dots \int e^{-\left(t_1^2+t_2^2+\ldots+t_{k-1}^2+(-t_1-t_2-\ldots-t_{k-1})^2\right)/(2n)}\,dt_1\,dt_2\,\ldots\,dt_{k-1}.$$

Обозначим через $K(t_1, t_2, \ldots, t_{k-1})$ единичный куб, задаваемый в $(k-1)$-мерном пространстве как множество точек $(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1})$, удовлетворяющих неравенствам $t_i \le x_i \le t_i+1$, $i = 1, 2, \ldots, k-1$. Кроме того, для произвольного компакта K $(k-1)$-мерного пространства определим функционал $\mathrm{Var}(K)$ равенством

$$\mathrm{Var}(K) = \max_{(x_1,\ldots,x_{k-1})\in K} e^{-\left(x_1^2+\ldots+x_{k-1}^2+(-x_1-\ldots-x_{k-1})^2\right)/(2n)} - \\ - \min_{(x_1,\ldots,x_{k-1})\in K} e^{-\left(x_1^2+\ldots+x_{k-1}^2+(-x_1-\ldots-x_{k-1})^2\right)/(2n)}.$$

Заметим, что если $(t_1, t_2, \ldots, t_{k-1}) \in \mathcal{D}$, то справедливо неравенство

$$\mathrm{Var}(K(t_1, t_2, \ldots, t_{k-1})) \le 1 - \exp\left\{-\frac{2(k-1)a}{\sqrt{n}}\right\} \le \frac{2(k-1)a}{\sqrt{n}}.$$

Далее, положим

$$\mathcal{D}_1 = \bigcup_{(t_1,\ldots,t_{k-1})\in\mathcal{D}} K(t_1, \ldots, t_{k-1});$$

$$\mathcal{D}_2 = \bigcup_{(t_1,\ldots,t_{k-1}):\ K(t_1,\ldots,t_{k-1})\subset\mathcal{D}} K(t_1, \ldots, t_{k-1}).$$

Отметим, что выполняются включения

$$\mathcal{D}_2 \subset \mathcal{D}, \quad \mathcal{D}_2 \subset \mathcal{D}_1.$$

Оценим объемы некоторых областей (объем области $\mathcal{D}$ будем обозначать через $|\mathcal{D}|$). При оценке объема области $\mathcal{D}_1 \setminus \mathcal{D}$ воспользуемся тем соображением, что этот объем не более произведения площади поверхности области $\mathcal{D}$ на единицу, так как область $\mathcal{D}_1 \setminus \mathcal{D}$ находится в слое толщины 1 сразу за границей области $\mathcal{D}$). В свою очередь, площади поверхности области $\mathcal{D}$ не превосходит площади поверхности $(k-1)$-мерного куба с ребром $2a\sqrt{n}$. Аналогично будем оценивать и объем области $\mathcal{D}\setminus\mathcal{D}_2$. Таким образом,

$$|\mathcal{D}| = (2a\sqrt{n})^{k-1} - 2\frac{(2a\sqrt{n})^{k-1}}{(k-1)!} = (2a\sqrt{n})^{k-1}\left(1 - \frac{2}{(k-1)!}\right);$$

$$|\mathcal{D}_1 \setminus \mathcal{D}| \le 2(k-1)(2a\sqrt{n})^{k-2};$$

$$|\mathcal{D}_1| = |\mathcal{D}| + |\mathcal{D}_1 \setminus \mathcal{D}| \le (2a\sqrt{n})^{k-1}\left(1 - \frac{2}{(k-1)!} + \frac{k-1}{a\sqrt{n}}\right) < \\ < (2a\sqrt{n})^{k-1}\left(1 + \frac{k-1}{a\sqrt{n}}\right);$$

$$|\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_2| \le 2(k-1)(2a\sqrt{n})^{k-2}.$$

Тогда, вводя обозначение

$$E_n(t_1, t_2, \ldots, t_{k-1}) = \exp\left\{\frac{t_1^2 + t_2^2 + \ldots + t_{k-1}^2 + (-t_1 - t_2 - \ldots - t_{k-1})^2}{2n}\right\},$$

получаем:

$$\sum_{(t_1,\ldots,t_{k-1})\in\mathcal{D}} \exp\left\{\frac{-\left(t_1^2 + t_2^2 + \ldots + t_{k-1}^2 + (-t_1 - t_2 - \ldots - t_{k-1})^2\right)}{2n}\right\} \le$$
$$\le \iint\limits_{\mathcal{D}_1} \ldots \int \left(E_n(t_1, t_2, \ldots, t_{k-1}) + \frac{2(k-1)a}{\sqrt{n}}\right) dt_1\, dt_2\, \ldots\, dt_{k-1} \le$$
$$\le \iint\limits_{\mathcal{D}_1} \ldots \int E_n(t_1, t_2, \ldots, t_{k-1})\, dt_1\, dt_2\, \ldots\, dt_{k-1} + \frac{2(k-1)a}{\sqrt{n}}|\mathcal{D}_1| \le$$
$$\le \iint\limits_{\mathcal{D}} \ldots \int E_n(t_1, t_2, \ldots, t_{k-1})\, dt_1\, dt_2\, \ldots\, dt_{k-1} +$$
$$+ \int\int\limits_{\mathcal{D}_1\setminus\mathcal{D}} \ldots \int E_n(t_1, t_2, \ldots, t_{k-1})\, dt_1\, dt_2\, \ldots\, dt_{k-1} + \frac{2(k-1)a}{\sqrt{n}}|\mathcal{D}_1| \le$$
$$\le \iint\limits_{\mathcal{D}} \ldots \int E_n(t_1, t_2, \ldots, t_{k-1})\, dt_1\, dt_2\, \ldots\, dt_{k-1} +$$
$$+ \exp\left\{\frac{-(k-1)(a\sqrt{n}/(k-1))^2 - (a\sqrt{n})^2}{2n}\right\} |\mathcal{D}_1 \setminus \mathcal{D}| + \frac{2(k-1)a}{\sqrt{n}}|\mathcal{D}_1| \le$$
$$\le \iint\limits_{\mathcal{D}} \ldots \int E_n(t_1, t_2, \ldots, t_{k-1})\, dt_1\, dt_2\, \ldots\, dt_{k-1} +$$
$$+ \exp\left\{\frac{-ka^2}{2(k-1)}\right\} 2(k-1)(2a\sqrt{n})^{k-2} + \frac{2(k-1)a}{\sqrt{n}}(2a\sqrt{n})^{k-1}\left(1 + \frac{k-1}{a\sqrt{n}}\right).$$

Таким образом, при $\Delta = a\sqrt{n}$ имеем такую верхнюю оценку:

$$
\begin{aligned}
\lambda(N,k,\Delta) \le \sqrt{\frac{k}{(2\pi kn)^{k-1}}}\ \exp\left\{\frac{ka(1+a^2)+\varepsilon}{2\sqrt{n}}\right\} \times \\
\times \left(\iint\limits_{\mathcal{D}}\ldots\int E_n(t_1,t_2,\ldots,t_{k-1})\,dt_1\,dt_2\,\ldots\,dt_{k-1} + \right.\\
+\exp\left\{\frac{-ka^2}{2(k-1)}\right\}\ 2^{k-1}a^{k-2}(k-1)(\sqrt{n})^{k-2} + \\
\left. + (2a)^k(k-1)(\sqrt{n})^{k-2}\left(1+\frac{k-1}{a\sqrt{n}}\right)\right).
\end{aligned}
$$

Аналогично оцениваем снизу

$$
\begin{aligned}
\sum_{(t_1,\ldots,t_{k-1})\in\mathcal{D}} \exp\left\{\frac{-\left(t_1^2+t_2^2+\ldots+t_{k-1}^2+(-t_1-t_2-\ldots-t_{k-1})^2\right)}{2n}\right\} \ge \\
\ge \iint\limits_{\mathcal{D}_2}\ldots\int\left(E_n(t_1,t_2,\ldots,t_{k-1})-\frac{2(k-1)a}{\sqrt{n}}\right)dt_1\,dt_2\,\ldots\,dt_{k-1} \ge \\
\ge \iint\limits_{\mathcal{D}_2}\ldots\int E_n(t_1,t_2,\ldots,t_{k-1})\,dt_1\,dt_2\,\ldots\,dt_{k-1} - \frac{2(k-1)a}{\sqrt{n}}|\mathcal{D}_2| \ge \\
\ge \iint\limits_{\mathcal{D}}\ldots\int E_n(t_1,t_2,\ldots,t_{k-1})\,dt_1\,dt_2\,\ldots\,dt_{k-1} - \\
-\int\int\limits_{\mathcal{D}\setminus\mathcal{D}_2}\ldots\int E_n(t_1,t_2,\ldots,t_{k-1})\,dt_1\,dt_2\,\ldots\,dt_{k-1} - \frac{2(k-1)a}{\sqrt{n}}|\mathcal{D}_2| \ge \\
\ge \iint\limits_{\mathcal{D}}\ldots\int E_n(t_1,t_2,\ldots,t_{k-1})\,dt_1\,dt_2\,\ldots\,dt_{k-1} + \\
+\exp\left\{\frac{-(k-1)(a\sqrt{n}/(k-1))^2-(a\sqrt{n})^2}{2n}\right\}\ |\mathcal{D}\setminus\mathcal{D}_2| - \frac{2(k-1)a}{\sqrt{n}}|\mathcal{D}| \ge \\
\ge \iint\limits_{\mathcal{D}}\ldots\int E_n(t_1,t_2,\ldots,t_{k-1})\,dt_1\,dt_2\,\ldots\,dt_{k-1} - \\
-\exp\left\{\frac{-ka^2}{2(k-1)}\right\}\ 2(k-1)(2a\sqrt{n})^{k-2} - \\
-\frac{2(k-1)a}{\sqrt{n}}(2a\sqrt{n})^{k-1}\left(1-\frac{2}{(k-1)!}\right).
\end{aligned}
$$

При $\Delta = a\sqrt{n}$ получаем такую нижнюю оценку:

$$\lambda(N,k,\Delta) \geq \sqrt{\frac{k}{(2\pi kn)^{k-1}}}\ \exp\left\{-\frac{ka(7+2a^2)+\varepsilon}{14\sqrt{n}}\right\}\ \times$$
$$\times\ \left(\iint\limits_{\mathcal{D}}\ldots\int E_n(t_1,t_2,\ldots,t_{k-1})\,dt_1\,dt_2\,\ldots\,dt_{k-1} - \right.$$
$$- \exp\left\{\frac{-ka^2}{2(k-1)}\right\}\ 2^{k-1}a^{k-2}(k-1)(\sqrt{n})^{k-2} -$$
$$\left. - (2a)^k(k-1)(\sqrt{n})^{k-2}\left(1-\frac{2}{(k-1)!}\right)\right).$$

Теперь, положив

$$I = I(N,k,\Delta) = \sqrt{\frac{k}{(2\pi kn)^{k-1}}}\ \times$$
$$\times\ \iint\limits_{\mathcal{D}}\ldots\int E_n(t_1,t_2,\ldots,t_{k-1})\,dt_1\,dt_2\,\ldots\,dt_{k-1},$$

при $\Delta = a\sqrt{n}$ получаем, что $I = I(N,k,\Delta)$ — некоторая высчитываемая константа, для которой выполняются соотношения

$$\lambda(N,k,\Delta) \leq I\ \exp\left\{\frac{ka(1+a^2)+\varepsilon}{2\sqrt{n}}\right\}\ \left(1+\frac{1}{I}\sqrt{\frac{k}{(2\pi kn)^{k-1}}}\ \times\right.$$
$$\times\ \left(\exp\left\{\frac{-ka^2}{2(k-1)}\right\}\ 2^{k-1}a^{k-2}(k-1)(\sqrt{n})^{k-2} + \right.$$
$$\left.\left. +\ (2a)^k(k-1)(\sqrt{n})^{k-2}\left(1+\frac{k-1}{a\sqrt{n}}\right)\right)\right) \leq$$
$$\leq I\ \exp\left\{\frac{ka(1+a^2)+\varepsilon}{2\sqrt{n}}\right\}\left(1+\frac{\sqrt{2^{k-1}}a^{k-2}(k-1)(\gamma+2a^2(1+\varepsilon))}{I\sqrt{k^{k-2}n}}\right) \leq$$
$$\leq I\ \exp\left\{\frac{ka(1+a^2)+\varepsilon}{2\sqrt{n}}\right\}\exp\left\{\frac{\sqrt{2^{k-1}}a^{k-2}(k-1)(\gamma+2a^2(1+\varepsilon))}{I\sqrt{k^{k-2}n}}\right\} \leq$$
$$\leq I\ \exp\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{ka(1+a^2)+\varepsilon}{2}+\frac{\sqrt{2^{k-1}}a^{k-2}(k-1)(\gamma+2a^2(1+\varepsilon))}{I\sqrt{k^{k-2}}}\right)\right\} \leq$$
$$\leq I\ \left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{ka(1+a^2)+\varepsilon}{2}+\right.\right.$$

$$+\frac{\sqrt{2^{k-1}}a^{k-2}(k-1)(\gamma+2a^2(1+\varepsilon))}{I\sqrt{k^{k-2}}}+\varepsilon\Bigg)\Bigg);$$

$$\lambda(N,k,\Delta)\geq I\ \exp\left\{-\frac{ka(7-2a^2)+\varepsilon}{14\sqrt{n}}\right\}\ \left(1-\frac{1}{I}\sqrt{\frac{k}{(2\pi kn)^{k-1}}}\times\right.$$

$$\times\ \left(\exp\left\{\frac{-ka^2}{2(k-1)}\right\}\ 2^{k-1}a^{k-2}(k-1)(\sqrt{n})^{k-2}+\right.$$

$$\left.\left.+\,(2a)^k(k-1)(\sqrt{n})^{k-2}\left(1-\frac{2}{(k-1)!}\right)\right)\right)\geq$$

$$\geq I\ \exp\left\{-\frac{ka(7-2a^2)+\varepsilon}{14\sqrt{n}}\right\}\left(1-\frac{\sqrt{2^{k-1}}a^{k-2}(k-1)(\gamma+2a^2)}{I\sqrt{k^{k-2}n}}\right)\geq$$

$$\geq I\ \left(1-\frac{ka(7-2a^2)+\varepsilon}{14\sqrt{n}}\right)\left(1-\frac{\sqrt{2^{k-1}}a^{k-2}(k-1)(\gamma+2a^2)}{I\sqrt{k^{k-2}n}}\right)\geq$$

$$\geq I\ \left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{ka(7-2a^2)+\varepsilon}{14}+\frac{\sqrt{2^{k-1}}a^{k-2}(k-1)(\gamma+2a^2)}{I\sqrt{k^{k-2}}}+\varepsilon\right)\right),$$

где $\gamma=e^{\frac{-ka^2}{2(k-1)}}$.

Список литературы

[1] Де Гроот М., *Оптимальные статистические решения*, Мир, Москва, 1974, 491 с.

[2] Крамер Г., *Математические методы статистики*, Мир, Москва, 1975, 648 с.

[3] Ширяев А. Н., *Вероятность*, «Наука», Москва, 1980, 576 с.

[4] Яблонский С. В., *Введение в дискретную математику*, «Наука», Москва, 1986, 384 с.

[5] Чашкин А. В., *Дискретная математика*, Издательский центр «Академия», Москва, 2012, 352 с.

[6] Галатенко А. В., Галатенко В. В., “О расстоянии Хэмминга между почти всеми функциями алгебры логики”, *Фундаментальная и прикладная математика*, **15**:5 (2009), 43–47.

Статья поступила 18 ноября 2025 г.

Estimates for the Proportion of Sequences with Small Deviations from the Mean

V. V. Kochergin

The problem of the magnitude of the restriction in a k-digit set on the permissible deviation from the average count of digits having each of the k values under the condition of a given proportion of such sequences. An approach is proposed that allows monitoring the influence of various parameters on the final result at each stage, and estimates of the accuracy of the approximate solution are provided.

Keywords: k-digit hypercube, Stirling's formula, proportion of sequences.

References

[1] DeGroot M. H, *Optimal statistical decisions*, McGraw-Hill, New York, 1969, 520 pp.

[2] Cramer H., *Mathematical methods of statistics*, Princeton university press, 1946, 529 pp.

[3] Shiryayev A. N., *Probability*, Springer Science+Business Media, New York, 1984, 573 pp.

[4] Yablonsky S. V., *Introduction to discrete mathematics*, Mir, Moscow, 1989, 384 pp.

[5] Chashkin A. V., *Discrete mathematics*, Publishing Center «Academy», Moscow, 2012 (In Russian), 352 pp.

[6] Galatenko A. V., Galatenko V. V., "On the Hamming distance between almost all Boolean functions", *Journal of Mathematical Sciences*, **172**:5 (2011), 650–653. DOI: 10.1007/s10958-011-0210-4

Received on November 18, 2025