Аппроксимационная полнота линейных дефинитных автоматов

И. В. Молдованов[1]

У линейных дефинитных автоматов выходные сигналы в каждый момент зависят лишь от ограниченного числа последних входных значений.

В работе исследуется вопрос функциональной полноты относительно оператора аппроксимационного замыкания для класса линейных дефинитных автоматов над полем из двух элементов. Для обозначенного множества автоматов получен критерий полноты, сформулированный в виде системы предполных классов.

Ключевые слова: аппроксимационное замыкание, линейные автоматы, дефинитные автоматы.

1. Введение

Линейные автоматы имеют важное значение для вычислительной техники, систем связи, теории кодирования и при построении генераторов псевдослучайных последовательностей. В работах [1, 2] было проведено исследование линейных автоматов над конечными полями с точки зрения функциональной полноты: были описаны A-предполные и K-предполные классы относительно соответствующих операторов замыкания. Отдельный интерес представляет изучение полноты не во всём классе линейных автоматов, а в его значимых подклассах, определяемых дополнительными ограничениями на поведение автомата. Такой подкласс составляют, в частности, линейные дефинитные автоматы, у которых выходные сигналы в каждый момент зависят лишь от ограниченного числа последних входных значений. В настоящей работе рассматривается вопрос полноты в классе линейных дефинитных автоматов над полем из двух элементов относительно оператора аппроксимационного замыкания.

2. Определения

Рассмотрим E_2 — конечное поле, состоящее из двух элементов $\{0,\ 1\}$. Конечный инициальный автомат над E_2 с n входами и одним выходом преобразует бесконечные входные последовательности $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ в бесконечную

[1] *Молдованов Илья Владимирович* — аспирант каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: jamfr-d@mail.ru.

Moldovanov Ilia Vladimirovich — graduate student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intellectual Systems.

последовательность β. В момент времени t по вектору $(\alpha_1(t), \ldots, \alpha_n(t))$, составленному из соответствующих элементов входных последовательностей, автомат производит элемент $\beta(t)$ выходной последовательности. Положим R_2 — множество формальных степенных рядов, построенных по последовательностям элементов из E_2, т.е. $R_2 = \{\sum_{t=0}^{\infty} x(t)\xi^t \mid x(t) \in E_2\}$. Обозначим $\alpha_1(\xi), \ldots, \alpha_n(\xi)$ — степенные ряды, построенные по входным последовательностям автомата, и $\beta(\xi)$ — ряд, соответствующий выходной последовательности. В этом смысле можно говорить, что автомат задает некоторое отображение $R_2^n \to R_2$. Далее в работе в первую очередь будем использовать данное представление автоматов.
Замыкание некоторого множества автоматов по операциям суперпозиции [3] (переименование переменных, отождествление переменных и подстановка) будем называть Σ-замыканием и обозначать $S(M)$.

3. Линейные дефинитные автоматы

Определение дефинитного автомата представлено в [4]. Дефинитным называется автомат, для которого найдется $t \in \mathbb{N}$ такое, что каждое входное слово длины t переводит автомат из любого состояния в одно и то же состояние, зависящее от этого входного слова. Данный класс совпадает с замыканием по операциям суперпозиции системы, состоящей из задержки с заданным начальным состоянием и универсальной «истинностной» ограниченно-детерминированной функции.

К линейным автоматам относятся задержки с заданным начальным состоянием $\xi x_1 + b,\ b = 0, 1$ и сумматор $x_1 + x_2$ [5]. Обозначим данные автоматы $F_\xi(x_1), F_{\xi,1}(x_1)$ и $F_+(x_1, x_2)$, соответственно. При замыкании данного множества по операциям композиции получаем класс линейных автоматов [1].

Сформулируем определение *линейного дефинитного* автомата. Автомат, содержащийся в замыкании по операциям суперпозиции системы $\{F_\xi(x_1), F_{\xi,1}(x_1), F_+(x_1, x_2)\}$, назовем *линейным дефинитным* автоматом. Обозначим данный класс LD_2. Отметим, что LD_2 не совпадает с пересечением классов линейных и дефинитных автоматов, а является подклассом данного множества. *Линейные дефинитные* автоматы, в том смысле, в котором они определены в данной работе, например, не содержат функцию, реализующую последовательность 1^∞, которая содержится в пересечении классов линейных и дефинитных автоматов.

Охарактеризуем вид отображения $R_2^n \to R_2$, которое задается произвольным линейным дефинитным автоматом с n входами. $E_2[\xi]$ будем обозначать множество полиномов по ξ с коэффициентами из E_2.

Теорема 1. *Функция $f : R_2^n \to R_2$ принадлежит классу LD_2 тогда и только тогда, когда существуют многочлены $u_0, u_1, \ldots, u_n \in E_2[\xi]$ такие, что для любых $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in R_2$ выполнено равенство:*

$$f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \sum_{i=1}^{n} u_i(\xi)\alpha_i + u_0(\xi). \tag{1}$$

Доказательство. Для доказательства прямого утверждения покажем, что любой линейный дефинитный автомат представим в виде (1).
Проведем индукцию по построению автомата. Базу индукции реализуют

$$F_+(\alpha_1, \alpha_2) = 1 \cdot \alpha_1 + 1 \cdot \alpha_2 + 0,$$
$$F_\xi(\alpha_1) = \xi \cdot \alpha_1,\ F_{\xi,1}(\alpha_1) = \xi \cdot \alpha_1 + 1.$$

Покажем, что представление (1) сохраняется при применении операций суперпозиции к автоматам вида $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i(\xi)x_i + u_0(\xi)$.
Для автомата $f(x'_1, \ldots, x'_n)$, получаемого из $f(x_1, \ldots, x_n)$ переименованием переменных с $x_1, \ldots, x_n$ на $x'_1, \ldots, x'_n$, соответственно, имеем:

$$f(x'_1, \ldots, x'_n) = \sum_{i=1}^{n} u_i(\xi)x'_i + u_0(\xi).$$

Рассмотрим операцию отождествления переменных. Пусть (без ограничения общности) для автомата $g(x_1, \ldots, x_{n-1})$ выполнено, что он получается из автомата $f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$ отождествлением переменных x_{n-1} и x_n:

$$\begin{aligned} g(x_1, \ldots, x_{n-1}) = f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_{n-1}) &= \\ &= \sum_{i=1}^{n-2} u_i(\xi)x_i + u_{n-1}(\xi)x_{n-1} + u_n(\xi)x_{n-1} + u_0(\xi) = \\ &= \sum_{i=1}^{n-2} u_i(\xi)x_i + (u_{n-1}(\xi) + u_n(\xi))x_{n-1} + u_0(\xi) = \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} u'_i(\xi)x_i + u'_0(\xi). \end{aligned}$$

Рассмотрим операцию подстановки. Пусть (без ограничения общности) для автомата $g(x_1, \ldots, x_{n+k-1})$ выполнено, что он получается из автомата

$f(x_1,\dots,x_{n-1},x_n)$ подстановкой $h(x'_1,\dots,x'_k)$ вместо переменной x_n:

$$g(x_1,\dots,x_{n-1},x'_1,\dots,x'_k) = f(x_1,\dots,x_{n-1},h(x'_1,x'_2,\dots,x'_k)) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n-1} u_i(\xi)x_i + u_n(\xi)\left(\sum_{j=1}^{k} u'_j(\xi)x'_j + u'_0(\xi)\right) + u_0(\xi) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n-1} u_i(\xi)x_i + \sum_{j=1}^{k} u_n(\xi)u'_j(\xi)x'_j + u_n(\xi)u'_0(\xi) + u_0(\xi) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n-1} u''_i(\xi)x_i + \sum_{j=1}^{k} u'''_j(\xi)x'_j + u''_0(\xi).$$

Следовательно, любой автомат, полученный при помощи операций суперпозиции из элементов $\{F_+, F_\xi, F_{\xi,1}\}$, будет также иметь вид (1).

Докажем вторую часть утверждения. Рассмотрим произвольную функцию $f(x_1,\dots,x_n) : R_2^n \to R_2$, для которой справедливо представление (1), и приведем линейный дефинитный автомат, который ее реализует.

Рассмотрим подстановку

$$F_1(x_1) = F_{\xi,1}(F_+(x_1,x_1)) = \xi\cdot 0 + 1 \in S(\{F_{\xi,1}(x_1), F_+(x_1,x_1)\}).$$

Следовательно, автомат, реализующий константную последовательность 10^∞, является линейным дефинитным.

Индукцией по степени многочлена, покажем, что для произвольного многочлена $u(\xi) \in E_2[\xi]$, $u(\xi) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i\xi^i$, найдется одноместный линейный дефинитный автомат, который реализует умножение на данный многочлен.

В качестве базы индукции рассмотрим многочлен нулевой степени $u(\xi) = a_0$.

- Случай $a_0 = 0$: рисунок 1.

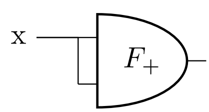

Рис. 1. Автомат $F_{\cdot 0}$

- Случай $a_0 = 1$: рисунок 2.

Пусть для произвольного многочлена степени n', $0 \le n' < n$ существует линейный дефинитный автомат, который реализует умножение на данный многочлен. Рассмотрим произвольный многочлен $u(\xi)$, $\deg(u(\xi)) = n$.

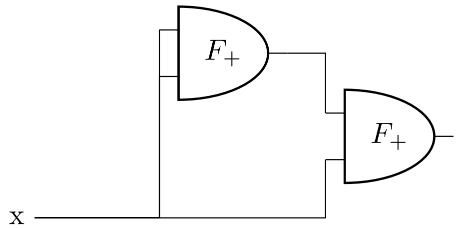

Рис. 2. Автомат $F_{\cdot 1}$

Имеем $u'(\xi) = \xi^n + u(\xi)$ для некоторого $u'(\xi) \in E_2[\xi],\ \deg(u'(\xi)) < n$. По предположению индукции существует линейный дефинитный автомат $F_{\cdot u'(\xi)}$, который реализует умножение на многочлен $u'(\xi)$, следовательно автомат $F_{\cdot u(\xi)}$, представленный на рисунке 3, реализует умножение на многочлен $u(\xi)$.

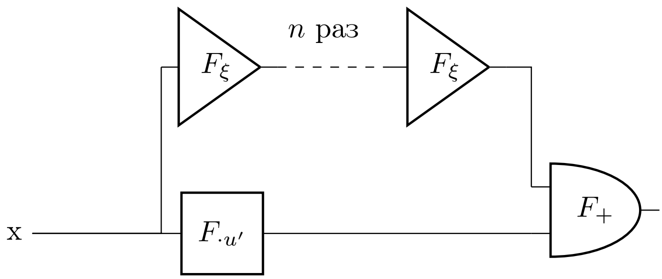

Рис. 3. Автомат $F_{\cdot u(\xi)}$

Для произвольного многочлена $u(\xi) \in E_2[\xi],\ u(\xi) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i \xi^i$ на рисунке 4 представлен автомат, реализующий сложение с данным многочленом.

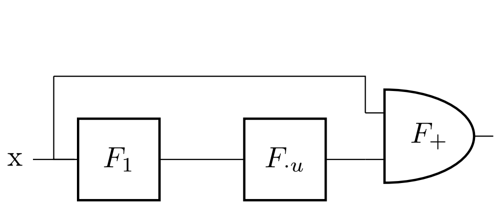

Рис. 4. Автомат $F_{+u(\xi)}$

Приведем автомат, реализующий функцию $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, для которой справедливо $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i(\xi)\alpha_i + u_0(\xi),\ \forall \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in R_2$. Описанный автомат представлен на рисунке 5.

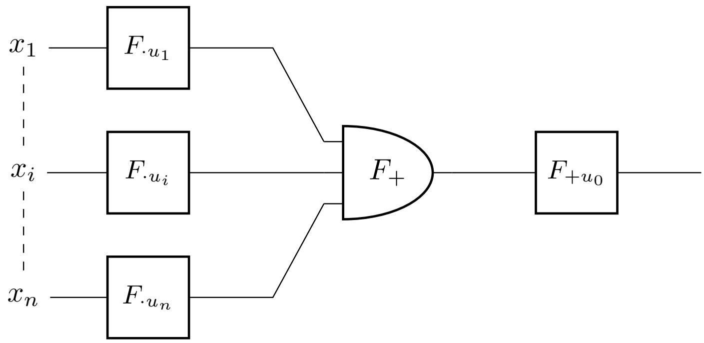

Рис. 5. Автомат $f(x_1, \ldots, x_n)$

□

4. A-полнота

Введем оператор A-замыкания [6] для класса линейных дефинитных автоматов LD_2.

Пусть $\alpha \in R_2$ — формальный степенной ряд, $\alpha = \sum\limits_{t=0}^{\infty} \alpha(t)\xi^t,\ \alpha(t) \in E_2$. Обозначим $\alpha|_{\bar{t}} = \sum\limits_{t=0}^{\bar{t}-1} \alpha(t)\xi^t$. Для автоматов $f(x_1, \ldots, x_n),\ g(x_1, \ldots, x_n) \in LD_2$ будем говорить, что они $\bar{t}$-эквивалентны, если для любых $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in R_2$ имеем $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)|_{\bar{t}} = g(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)|_{\bar{t}}$. Для некоторого $f \in LD_2$ и $\bar{t} \in \mathbb{Z}_+$ будем обозначать $E(f, \bar{t})$ множество всех $\bar{t}$-эквивалентных автомату f, с точностью до переименования переменных и удаления фиктивных переменных, линейных дефинитных автоматов.

Для некоторого множества $M \subseteq LD_2$ будем говорить, что автомат f *A-выразим* через множество M, если для любого $t,\ t \in \mathbb{Z}_+$ найдется автомат $f^{(t)},\ f^{(t)} \in S(M)$, что f t-эквивалентен $f^{(t)}$. Множество всех автоматов A-выразимых через $M,\ M \subseteq LD_2$ будем обозначать $A(M)$.

Лемма 1. *Пусть $M \subseteq LD_2$ и $S(M) = M$. Если существует $T \in \mathbb{Z}_+,\ T < \infty$, такое что для произвольного $f \in M$ имеем $E(f, T) \subseteq M$, то $A(M) = M$.*

Доказательство. Пусть произвольный автомат $g \in A(M)$. По определению A-выразимости, существует $f \in S(M)$ такой, что $g \in E(f, T)$. По условию $S(M) = M$, следовательно, $f \in M$ и $E(f, T) \subseteq M$. Имеем $g \in M$, что завершает доказательство леммы. □

Данная лемма позволяет упростить доказательство A-замкнутости для таких подмножеств LD_2, принадлежность которым для произвольного автомата $f \in LD_2$ можно определить по его поведению на словах фиксированной длины T.

Определение 1. *Определим семейство H_A подмножеств LD_2 следующим образом:*

$$T_0 = \{f(\dots) \mid f \in LD_2,\ f = \sum_{i=1}^{n} u_i(\xi)x_i + u_0(\xi) \ \text{и} \ \sum_{i=1}^{n} u_i(0)\cdot 0 + u_0(0) = 0\},$$

$$T_1 = \{f(\dots) \mid f \in LD_2,\ f = \sum_{i=1}^{n} u_i(\xi)x_i + u_0(\xi) \ \text{и} \ \sum_{i=1}^{n} u_i(0)\cdot 1 + u_0(0) = 1\},$$

$$V_1 = \{f(\dots) \mid f \in LD_2,\ f = \sum_{i=1}^{n} u_i(\xi)x_i + u_0(\xi) \ \text{и среди чисел} \ u_i(0), \\ i = 1, \dots, n, \ \text{не более одного отличного от нуля}\},$$

$$V_2 = \{f(\dots) \mid f \in LD_2,\ f = \sum_{i=1}^{n} u_i(\xi)x_i + u_0(\xi) \ \text{и} \ \sum_{i=1}^{n} u_i(0) = 1\},$$

$$U = \{f(\dots) \mid f \in LD_2,\ f = \sum_{i=1}^{n} u_i(\xi)x_i + u_0(\xi),\ u_i(\xi) = \sum_{j=0}^{\deg(u_i(\xi))} a_{j,i}\xi^j \\ \text{и} \ a_{1,i} = 0,\ \forall i = 1, \dots, n\}.$$

Классы T_0, T_1, V_1, V_2 определяют поведение автоматов только в начальный момент времени. Дадим неформальное определение каждого из классов. Множества T_b, $b \in \{0, 1\}$ можно описать как классы автоматов, которые в начальный момент времени сохраняют соответствующий элемент b поля E_2. Классы V_1 и V_2 содержат автоматы, которые в начальный момент времени существенно зависят не более чем от одного своего входа или от нечетного числа своих входов, соответственно.

Лемма 2. *Множества $T_0, T_1, V_1, V_2 \in H_A$ являются A-замкнутыми.*

Доказательство. В начальный момент времени для произвольного линейного дефинитного автомата, зависящего от n входов, для любых $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in R_2$ имеем

$$f(\alpha_1, \dots, \alpha_n)|_1 = \sum_{i=1}^{n} u_i(0)\alpha_i(0) + u_0(0).$$

Следовательно, в начальный момент времени линейным дефинитным автоматом, зависящим от n входов, реализуется некоторая линейная булева функция от n переменных. Данное отображение $E_2^n \to E_2$, порождаемое автоматом f, обозначим $f^{(0)}$. Покажем, что операции отождествления и подстановки для автоматов индуцируют соответствующие операции суперпозиции для реализуемых ими в начальный момент времени булевых функций.

Операция отождествления. Пусть, без ограничения общности, автомат $g(x_1, \ldots, x_{n-1})$ получается из автомата $f(x_1, \ldots, x_n)$ отождествлением переменных x_{n-1} и x_n, имеем

$$g^{(0)}(x_1^{(0)}, \ldots, x_{n-1}^{(0)}) = f^{(0)}(x_1^{(0)}, \ldots, x_{n-1}^{(0)}, x_{n-1}^{(0)}) = \\ = \sum_{i=1}^{n-2} u_i(0)x_i^{(0)} + (u_{n-1}(0) + u_n(0))\, x_{n-1}^{(0)} + u_0(0).$$

Операция подстановки. Пусть, без ограничения общности, автомат $g(x_1, \ldots, x_{n-1}, y_1, \ldots, y_k)$ получается из автомата $f(x_1, \ldots, x_n)$ подстановкой $h(y_1, \ldots, y_k)$ вместо переменной x_n, имеем

$$g^{(0)}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_{n-1}^{(0)}, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_k^{(0)}) = \\ = f^{(0)}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_{n-1}^{(0)}, h(y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_k^{(0)})) = \\ = \sum_{i=1}^{n-1} u_i(0)x_i^{(0)} + u_n(0) \cdot \left(\sum_{j=1}^{k} u_j'(0)y_j^{(0)} + u_0'(0) \right) + u_0(0).$$

Покажем, что для каждого класса T_0, T_1, V_1, V_2 реализуемые ими в начальный момент булевы функции принадлежат некоторому замкнутому подклассу линейных функций [7]. Обозначим L_b — множество всех линейных функций, сохраняющих константу $b,\ b = 0, 1$, L_u — все линейные функции от одной переменной, L_s — все самодвойственные линейные функции.

- $T_b,\ b = 0, 1$. По определению для любого $f \in T_b,\ b = 0, 1$ имеем $f^{(0)}(b, \ldots, b) = b,\ b = 0, 1$, следовательно, $f^{(0)} \in L_b,\ b = 0, 1$.

- V_1: По определению для любого $f \in V_1$ функция $f^{(0)}$ существенно зависит не более чем от одной своей переменной, следовательно, $f^{(0)} \in L_u$.

- V_2: По определению для любого $f \in V_2$ функция $f^{(0)}$ существенно зависит от нечетного числа своих переменных, что соответствует определению линейной самодвойственной функции, следовательно, $f^{(0)} \in L_s$.

Было показано, что для любого $\Theta,\ \Theta \in \{T_0, T_1, V_1, V_2\}$, имеем $S(\Theta) = \Theta$. Каждый из перечисленных классов определяет выход автомата только в начальный момент времени, следовательно, по лемме 1, имеем $A(\Theta) = \Theta,\ \Theta \in \{T_0, T_1, V_1, V_2\}$. $\square$

Класс U содержит автоматы, выход которых в первый момент времени не зависит от входа в начальный момент.

Лемма 3. *Множество $U \in H_A$ является A-замкнутым.*

Доказательство. Покажем, что существенные операции суперпозиции не выводят за пределы класса U.

Операция отождествления. Пусть, без ограничения общности, автомат $g(x_1, \ldots, x_{n-1})$ получается из автомата $f(x_1, \ldots, x_n)$ отождествлением переменных x_{n-1} и x_n, имеем

$$\begin{aligned}
&g(x_1, \ldots, x_{n-1}) = f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_{n-1}) = \\
&\quad = \sum_{i=1}^{n-2} u_i(\xi)x_i + \left(u_{n-1}(\xi) + u_n(\xi)\right) x_{n-1} + u_0(\xi) = \\
&\quad = \sum_{i=1}^{n-2} u_i(\xi)x_i + \big((u_{n-1}(0) + u_n(0)) + \xi^2 \left(\bar{u}_{n-1}(\xi) + \bar{u}_n(\xi)\right)\big)\, x_{n-1} + u_0(\xi).
\end{aligned}$$

Операция подстановки. Пусть, без ограничения общности, автомат $g(x_1, \ldots, x_{n-1}, y_1, \ldots, y_k)$ получается из автомата $f(x_1, \ldots, x_n)$ подстановкой $h(y_1, \ldots, y_k)$ вместо переменной x_n, имеем

$$\begin{aligned}
&g(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, y_1, y_2, \ldots, y_k) = f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, h(y_1, y_2, \ldots, y_k)) = \\
&\quad = \sum_{i=1}^{n-1} u_i(\xi)x_i + u_n(\xi) \left(\sum_{j=1}^{k} u'_j(\xi)y_j + u'_0(\xi)\right) + u_0(\xi) = \\
&\quad = \sum_{i=1}^{n-1} u_i(\xi)x_i + \left(u_n(0) + \xi^2\bar{u}_n(\xi)\right) \left(\sum_{j=1}^{k} \left(u'_j(0) + \xi^2\bar{u}'_j(\xi)\right) y_j\right) + u''_0(\xi) = \\
&\quad = \sum_{i=1}^{n-1} u_i(\xi)x_i + \sum_{j=1}^{k} \left(u''_j(0) + \xi^2\bar{u}''_j(\xi)\right) y_j + u''_0(\xi).
\end{aligned}$$

Было показано, что $S(U) = U$. Класс U определяет выход автомата только в первый момент времени, следовательно, по лемме 1, имеем $A(U) = U$.

$\square$

Сформулируем основное утверждение.

Теорема 2. *Пусть $M \subset LD_2$, тогда $A(M) = LD_2 \iff M \not\subseteq \Theta,\ \forall\Theta \in H_A$.*

Доказательство. Прямое утверждение следует из A-замкнутости классов $T_0,\ T_1,\ V_1,\ V_2,\ U$, каждый из которых не совпадает с LD_2.

Докажем обратное утверждение. Для каждого класса $\Theta \in H_A$ в M существует хотя бы один автомат f_Θ, такой что $f_\Theta \notin \Theta$. Введем соответствующие обозначения: $f_{T_0}, f_{T_1}, f_{V_1}, f_{V_2}, f_U$, которые будем ассоциировать с некоторым автоматом, содержащимся в соответствующем множестве $M \setminus \Theta,\ \Theta \in H_A$.

Покажем, что в $A(M)$ существуют автоматы $f_{\omega_b}(x_1),\ b = 0, 1$, которые 2-эквивалентны константам и в начальный момент времени принимают значения 0 и 1 соответственно:

$$f_{\omega_b}(x_1) = \xi^2 \bar{u}_{1,b}(\xi)x_1 + (b + \xi \bar{u}_{0,b}(\xi)),\ b = 0, 1. \tag{2}$$

Рассмотрим автомат

$$f_{V_2}(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} u_i(\xi)x_i + u_0(\xi),\ \sum_{i=1}^{n} u_i(0) = 0,$$

следовательно,

$$f_c(x_1) = f_{V_2}(x_1, \ldots, x_1) = \xi u_1'(\xi)x_1 + (a_0 + \xi u_0'(\xi)).$$

В зависимости от значения коэффициента a_0, положим:

- $a_0 = 0$: $f_0(x_1) = f_c(x_1)$ и $f_1(x_1) = f_{T_0}(f_c(x_1), \ldots, f_c(x_1))$,
- $a_0 = 1$: $f_0(x_1) = f_{T_1}(f_c(x_1), \ldots, f_c(x_1))$ и $f_1(x_1) = f_c(x_1)$.

Искомые автоматы могут быть получены при помощи подстановки:

$$f_{\omega_b}(x_1) = f_b(f_0(x_1)) = \xi^2 \bar{u}_{1,b}(\xi)x_1 + (b + \xi \bar{u}_{0,b}(\xi)).$$

Покажем, что сумматор от трех переменных содержится в A-замыкании множества M. Рассмотрим автомат $f_{V_1}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. По определению, в начальный момент времени он существенно зависит хотя бы от двух своих переменных. Без ограничения общности будем считать, что x_1 и x_2 содержатся среди этих переменных. Отождествим остальные переменные f_{V_1} и получим автомат:

$$f(x_1, x_2, x) = f_{V_1}(x_1, x_2, x, \ldots, x) = (1 + \xi u_1(\xi))x_1 + (1 + \xi u_2(\xi))x_2 + f'(x).$$

Используя подстановку $f(f(x, x_1, x), f(x_2, x, x), x)$, получим автомат

$$h(x_1, x_2, x) = (1 + \xi u_1(\xi))(1 + \xi u_2(\xi))x_1 + (1 + \xi u_1(\xi))(1 + \xi u_2(\xi))x_2 + \\ + h'(x) = (1 + \xi u'(\xi))x_1 + (1 + \xi u'(\xi))x_2 + h'(x).$$

Индукцией по $s \in \mathbb{Z}_+$ покажем, что для любого $s \in \mathbb{Z}_+$ автомат

$$h_s(x_1, x_2, x) = (1+\xi u'(\xi))^{2^s} x_1 + (1+\xi u'(\xi))^{2^s} x_2 + h'_s(x),$$

принадлежит $A(M)$ некоторого $h'_s(x)$. База индукции

$$h_0(x_1, x_2, x) = h(x_1, x_2, x) = (1+\xi u'(\xi))^{2^0} x_1 + (1+\xi u'(\xi))^{2^0} x_2 + h'(x).$$

Для доказательства шага индукции рассмотрим подстановку

$$\begin{aligned}
&h_{s+1}(x_1, x_2, x) = h_s(h_s(x_1, x_2, x), x, x) = \\
&= (1+\xi u'(\xi))^{2^s}(1+\xi u'(\xi))^{2^s} x_1 + (1+\xi u'(\xi))^{2^s}(1+\xi u'(\xi))^{2^s} x_2 + \\
&+ h'_{s+1}(x) = (1+\xi u'(\xi))^{2^{s+1}} x_1 + (1+\xi u'(\xi))^{2^{s+1}} x_2 + h'_{s+1}(x).
\end{aligned}$$

Воспользуемся данным утверждением, и для некоторого $s \in \mathbb{N}$ рассмотрим подстановку

$$\begin{aligned}
&f_s(x_1, x_2, x_3, x) = h_s(h_s(x_1, x_2, x), x_3, x) = (1+\xi u'(\xi))^{2^{s+1}} x_1 + \\
&+ (1+\xi u'(\xi))^{2^{s+1}} x_2 + (1+\xi u'(\xi))^{2^s} x_3 + (1+\xi u'(\xi))^{2^s} f'_s(x) + f'_s(x).
\end{aligned}$$

Учитывая, что $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ в поле характеристики два, получаем:

$$\begin{aligned}
&f_s(x_1, x_2, x_3, x) = x_1 + x_2 + x_3 + \\
&+ \xi^{2^{s+1}} u''(\xi) x_1 + \xi^{2^{s+1}} u''(\xi) x_2 + \xi^{2^s} \tilde{u}(\xi) x_3 + \xi^{2^s} f'_s(x).
\end{aligned} \tag{3}$$

Утверждение (3) верно для любого $s \in \mathbb{N}$, следовательно сумматор от трех переменных $F_+(x_1, x_2, x_3) \in A(M)$.

Докажем, что для любого $s \in \mathbb{N}$ автомат $g_s(x_1)$, s-эквивалентный задержке с нулевым начальным состоянием, принадлежит $A(M)$. Рассмотрим автомат

$$f_U(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} u_i(\xi) x_i + u_0(\xi), \; u_i(\xi) = \sum_{j=0}^{\deg(u_i(\xi))} a_{j,i} \xi^j.$$

$f_U \notin U$, следовательно, $a_{1,i} = 1$ для некоторого i, $1 \le i \le n$. Без ограничения общности будем считать, что $a_{1,1} = 1$. Используя операцию отождествления переменных, получим:

$$f_U(x_1, x_2, \ldots, x_2) = g(x_1, x_2) = u_1(\xi) x_1 + u'_2(\xi) x_2 + u_0(\xi).$$

Воспользуемся (2) и рассмотрим подстановку:

$$g'(x_1) = g(x_1, f_{\omega_0}(x_1)) = (a + \xi + \xi^2 u'_1(\xi)) x_1 + (b + c\xi + \xi^2 u'_0(\xi)).$$

В зависимости от значения коэффициентов a и b, используя (3), положим:

- $a=0,\ b=0: g_1(x_1)=g'(x_1)$,
- $a=0,\ b=1: g_1(x_1)=g'(x_1)+f_{\omega_0}(x_1)+f_{\omega_1}(x_1)$,
- $a=1,\ b=0: g_1(x_1)=g'(x_1)+x_1+f_{\omega_0}(x_1)$,
- $a=1,\ b=1: g_1(x_1)=g'(x_1)+x_1+f_{\omega_1}(x_1)$.

Следовательно:

$$g_1(x_1)=(\xi+\xi^2u''_{1,1}(\xi))x_1+(c\xi+\xi^2u''_{0,1}(\xi)).$$

База индукции для $s=2$ реализуется подстановкой

- $c=0: g_2(x_1)=g_1(x_1)$,
- $c=1: g_2(x_1)=g_1(x_1)+g_1(f_{\omega_0}(x_1))+g_1(f_{\omega_1}(x_1))$.

Докажем шаг индукции для $g_{s+1}(x_1)$, имеем:

$$g_s(x_1)=(\xi+a\xi^s+\xi^{s+1}u_{1,s}(\xi))x_1+(b\xi^s+\xi^{s+1}u_{0,s}(\xi)),$$

тогда

$$\tilde{g}_s(x_1)=\underbrace{g_s(g_s(\dots g_s(x_1)\dots))}_{s\text{ раз}}=(\xi^s+\xi^{s+1}\tilde{u}_1(\xi))x_1+\xi^s\tilde{u}_0(\xi).$$

В зависимости от значения коэффициентов a и b, построим автомат $g_{s+1}(x_1)$:

- $a=0,\ b=0$: $g_{s+1}(x_1)=g_s(x_1)$,
- $a=0,\ b=1$: $g_{s+1}(x_1)=g_s(x_1)+\tilde{g}_s(f_{\omega_0}(x_1))+\tilde{g}_s(f_{\omega_1}(x_1))$,
- $a=1,\ b=0$: $g_{s+1}(x_1)=g_s(x_1)+\tilde{g}_s(x_1)+\tilde{g}_s(f_{\omega_0}(x_1))$,
- $a=1,\ b=1$: $g_{s+1}(x_1)=g_s(x_1)+\tilde{g}_s(x_1)+\tilde{g}_s(f_{\omega_1}(x_1))$.

Так как утверждение верно для любого $s\in\mathbb{N}$, то задержка с нулевым начальным состоянием принадлежит $A(M)$.

Покажем, что константы 0 и 1 принадлежат $A(M)$. Рассмотрим, полученные в (2), автоматы

$$f_{\omega_b}(x_1)=\xi^2\bar{u}_{1,b}(\xi)x_1+(b+\xi\bar{u}_{0,b}(\xi)).$$

Покажем, что для любого $s\in\mathbb{N}$ автомат

$$f_{b,s}(x_1)=\xi^s\bar{u}_{1,b,s}(\xi)x_1+(b+\xi^s\bar{u}_{0,b,s}(\xi))\in A(M).$$

Положим $f_{b,1}(x_1)=f_{\omega_b}(x_1)$. Пусть

$$f_{b,s}(x_1)=\xi^s\left(a+\xi\bar{u}_{1,b,s}(\xi)\right)x_1+\left(b+\xi^s(c+\xi\bar{u}_{0,b,s})(\xi)\right),$$

тогда

- $a = 0$: $f_{b,s+1}(x_1) = f_{b,s}(x_1) + \xi^s f_{\omega_0}(x_1) + \xi^s f_{\omega_c}(x_1)$,
- $a = 1$: $f_{b,s+1}(x_1) = f_{b,s}(x_1) + \xi^s x_1 + \xi^s f_{\omega_c}(x_1)$,

Так как утверждение верно для любого $s \in \mathbb{N}$, то константы 0 и 1 принадлежат $A(M)$.
Имеем $x_1 + x_2 = x_1 + x_2 + 0$, следовательно в $A(M)$ содержится полная система $\{x_1 + x_2, \xi x_1, 1\}$. □

Следствие 1. *Множество замкнутых классов H_A является приведенной критериальной системой относительно оператора A-замыкания в классе линейных дефинитных автоматов.*

Доказательство. Для каждого класса $\Theta \in H_A$ приведем набор автоматов, которые отличают Θ от любого другого класса $\Theta' \in H_A \setminus \{\Theta\}$.

$$\begin{aligned}
&\bar{T}_0 = \{0,\ x_1 + x_2,\ \xi x_1\},\\
&\bar{T}_1 = \{1,\ x_1 + x_2 + x_3,\ \xi x_1 + 1\},\\
&\bar{V}_1 = \{0,\ 1,\ \xi x_1\},\\
&\bar{V}_2 = \{x_1 + 1,\ x_1 + x_2 + x_3,\ (1 + \xi)x_1\}\\
&\bar{U} = \{1,\ x_1 + x_2\}.
\end{aligned}$$

□

5. Заключение

В данной работе для множества линейных дефинитных автоматов была получена система предполных классов относительно оператора A-замыкания. Дальнейшие исследования по данной теме могут заключаться в исследовании полноты множества относительно оператора Σ-замыкания.

В заключение автор выражает особую признательность Часовских А. А. за научное руководство.

Список литературы

[1] Часовских А. А., “О полноте в классе линейных автоматов”, *Математические вопросы кибернетики*, **3**, Наука, М., 1991, 140–166.

[2] Часовских А. А., “Проблема полноты в классах линейных автоматов”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **22**:2 (2018), 151–154.

[3] Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С., *Введение в теорию автоматов*, Наука, М., 1985, 320 с.

[4] Алешин С. В., Бабин Д. Н., Часовских А. А., “Автоматы: полнота, выразимость, применение”, *Математические вопросы кибернетики*, **22**, ФИЗМАТЛИТ, М., 2024, 223–275.

[5] Гилл А., *Линейные последовательностные машины*, Наука, М., 1974, 288 с.

[6] Буевич В. А., “Об алгоритмической неразрешимости распознавания A-полноты для ограниченно-детерминированных функций”, *Матем. заметки*, **11**:6 (1972), 687–697.

[7] Яблонский С. В., Гаврилов Г. П., Кудрявцев В. Б., *Функции алгебры логики и классы Поста*, Наука, М., 1966, 120 с.

Approximation Completeness of Linear Definite Automata

Moldovanov I.V.

In linear definite automata, the output signals at each moment depend only on a bounded number of the most recent input values.

This paper studies functional completeness with respect to the operator of approximation closure for the class of linear definite automata over the two-element field. For this class of automata, a completeness criterion is obtained, formulated in terms of a system of precomplete classes.

Keywords: approximation closure, linear automata, definite automata.

References

[1] Chasovskikh A. A., “On completeness in the class of linear automata”, *Mathematical Problems of Cybernetics*, **3**, Nauka, Moscow, 1991, 140–166 (In Russian).

[2] Chasovskikh A. A., “The completeness problem in classes of linear automata”, *Intelligent Systems. Theory and Applications*, **22**:2 (2018), 151–154 (In Russian).

[3] Kudryavtsev V. B., Aleshin S. V., Podkolzin A. S., *Introduction to Automata Theory*, Nauka, Moscow, 1985 (In Russian), 320 pp.

[4] Aleshin S. V., Babin D. N., Chasovskikh A. A., “Automata: completeness, expressibility, applications”, *Mathematical Problems of Cybernetics*, **22**, Fizmatlit, Moscow, 2024, 223–275 (In Russian).

[5] A. Gill, *Linear sequential circuits: Analysis, Synthesis, and Applications*, McGraw-Hill, New York, 1967, 215 pp.

[6] Buevich V. A., "On the algorithmic undecidability of A-completeness for the boundedly determinate functions", *Mathematical Notes of the Academy of Sciences of the USSR*, **11** (1972), 417–421.

[7] S. V. Yablonskii, G. P. Gavrilov, V. B. Kudryavtsev, *Functions of Boolean algebra and Post classes*, Nauka, Moscow, 1966 (In Russian), 120 pp.