Введение в логические процессы. Общая схема функционирования решателя

А. С. Подколзин[1]

В статье описывается общая схема функционирования решателя математических задач. Рассказывается как происходит сканирование задачи, как запускать решение задачи и как осуществлять пошаговый просмотр. Приводится большое количество упражнений по вводу и решению задач.

Ключевые слова: решатель математических задач, логические процессы, логический язык, логическая формализация задач.

1. Введение

Данная статья является второй в цикле статей, посвященных практикуму по решателю математических задач. Она является логическим продолжением статьи [1]. В данной статье мы опишем общую схему функционирования решателя математических задач и приведем упражнения по вводу и решению задач из разных разделов математики. Решатель и заложенные в него принципы подробно описаны в монографиях [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10].

2. Сканирование задачи

При обычном программировании для решения задач заданного типа разрабатывается один общий алгоритм, который гарантирует получение за конечное число шагов ответа в случае любой конкретной задачи этого типа. Такой алгоритм представляется в виде нескольких взаимодействующих между собой блоков, обеспечивающих циклический процесс постепенного упрощения параметров решаемой задачи (в частности, уменьшения оставшегося объема перебора для процедур переборного типа) — вплоть до получения окончательного ответа. Каждый из блоков несет здесь вполне определенную функциональную нагрузку, как правило, основанную на том или ином теоретическом утверждении, связанном с обрабатываемыми алгоритмом объектами. Его можно рассматривать как прием для достижения определенной текущей подцели. В свою очередь,

[1] *Подколзин Александр Сергеевич* — д.ф.м.н., профессор каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: alexander.p@yandex.ru.

Podkolzin Alexander Sergeevich — Dr. of Sc., Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intellectual Systems.

отдельный блок сам определяется схемой своих подблоков, и т.д. Здесь возникает иерархия уровней, в которой на каждом уровне несколько приемов (как правило, не более одного — двух десятков) оказываются связаны в вычислительный цикл, так что после выполнения очередного приема известно, к какому приему следует переходить дальше.

К сожалению, такого рода четкую программу действий удается составить лишь для достаточно узких классов задач. Хорошо известны результаты об алгоритмической неразрешимости различных общих проблем, и даже в случае наличия алгоритма он часто оказывается практически неприемлемым по своей трудоемкости. Для преодоления возникающих здесь трудностей приходится резко увеличивать количество используемых приемов, чтобы охватить алгоритмическими возможностями если не все многообразие задач предметной области, то хотя бы возможно больший класс задач, встречающихся в реальных ситуациях. Эти приемы создаются уже не путем теоретического проектирования алгоритма, а извлекаются из последовательности конкретных обучающих задач и складываются в одну общую базу приемов. Количество приемов, используемых для решения задач в предметной области, обычно существенно больше чем в алгоритмической процедуре указанного выше блочного типа - сотни и тысячи вместо десятков. Последовательность их работы заранее не фиксирована, и после срабатывания очередного приема необходим цикл поиска следующего применяемого приема. Разумеется, при увеличении числа приемов, работающих в общем процессе, существенно усложняется регулировка взаимодействия между ними, и возникает необходимость в длительной эмпирической оптимизации их решающих правил.

Для организации цикла поиска очередного применяемого приема в решателе используется процедура сканирования задачи, которую можно представлять как своего рода модель внутреннего логического зрения. Для большинства приемов активизация их при рассмотрении задачи начинается с обнаружения в логических структурах данных некоторого логического символа, заранее выбранного для этого приема. В качестве такого ключевого логического символа берется обычно некоторый логический символ, появление которого необходимо для возможности применения рассматриваемого приема, причем при нескольких возможных выборах предпочтение отдается наиболее редко встречающемуся логическому символу (для уменьшения потерь времени при попытках применения приема). Указанное закрепление за приемами логических символов предопределяет организацию всей базы приемов решателя по принципу энциклопедии: она распадается на группы приемов, “принадлежащих” соответствующим символам, причем каждая группа реализуется в виде отдельной алгоритмической процедуры A_f — программы логического символа f. В особых случаях прием не удается связать с каким-либо конкретным логическим символом, появление которого является необходимым для срабатывания. Такие приемы (их совсем немного) распределены по четырем логическим символам — названиям "доказать", "описать", "преобразовать", "исследовать" типов задач, при решении которых возможно их применение.

Текущая ситуация, возникающая в процессе работы решателя, описывается последовательностью задач $Z_1, Z_2, \ldots, Z_N$, где Z_{i+1} — вспомогательная задача, введенная при решении задачи Z_i $(i = 1, \ldots, N-1)$. В этой последовательности (далее называем ее цепью задач) задача Z_1 является фиктивной — она создается автоматически при запуске логической системы и используется для организации интерфейса. Эта задача (далее называемая исходной задачей) имеет тип "исследовать" и единственную однобуквенную посылку "вход". При просмотре посылок данной задачи решатель обращается к программе логического символа "вход", которая и является программой интерфейса логической системы. С помощью интерфейса можно ввести некоторую задачу Z_2, которая далее и решается, порождая вспомогательные задачи $Z_3, \ldots, Z_N$. Будем называть задачу Z_N текущей задачей; Z_2 — корневой задачей. Исходная задача, кроме организации интерфейса, выполняет функции "доски объявлений" — различные процедуры решателя могут обмениваться между собой сообщениями, размещая их в списке комментариев к посылкам этой задачи.

Каждая задача Z_i $(i = 1, \ldots, N)$ характеризуется натуральным числом M_i, называемым ее максимальным уровнем и определяющим уровень средств, отведенных для ее решения (по исчерпании этих средств выдается отказ), целым неотрицательным числом m_i, $m_i \leq M_i$, называемым текущим уровнем этой задачи и определяющим уровень средств, среди которых в текущий момент ведется поиск очередного преобразования задачи Z_i, а также вспомогательной информацией, необходимой для возобновления прерванной процедуры решения задачи Z_{i-1} по окончании решения задачи Z_i.

Текущий уровень задачи является одним из входных параметров, получаемых приемами; он учитывается решающими правилами приемов и позволяет организовать необходимые приоритеты в их применении: при меньших значениях этого уровня срабатывают приемы с большим приоритетом. В процессе обучения решающие правила приемов корректируются таким образом, чтобы на каждом шаге выбирался прием, наиболее целесообразный с точки зрения обучающего систему эксперта. При первоначальном обращении к задаче Z_i ее текущий уровень равен 0.

Изменение текущей ситуации происходит в следующем рабочем цикле решателя:

1) Происходит обращение к программе логического символа f — типа задачи Z_N. Если при этом не срабатывает ни один из приемов, либо сработавшие приемы изменили лишь комментарии задач и ни один из них не указал явно на необходимость повторного рассмотрения задачи (в таких случаях говорим, что процедура не внесла существенных изменений в текущую ситуацию), то переход к пункту 3, иначе — к пункту 2.

2) Если в результате срабатывания приема определился ответ на задачу Z_N либо был выдан отказ на нее, то возобновляется прерванный ранее прием решения задачи Z_{N-1}, в процессе реализации которого возникла задача Z_N. При $N = 2$ в этом случае выдается ответ либо отказ на решаемую задачу и возвращение в программу интерфейса решателя; при $N = 1$ - происходит выход из логической системы. При отсутствии ответа либо отказа на задачу Z_N текущий уровень этой задачи заменяется на 0, и переход к пункту 1. Это означает, что при наличии существенных изменений, внесенных приемом, решатель повторяет цикл анализа текущей ситуации с самого начала.

3) Осуществляется последовательный просмотр всех условий и посылок F задачи Z_N, вес v которых равен текущему уровню m_N этой задачи либо равен $m_N + 1$. Сначала просматриваются условия, затем посылки; порядок просмотра условий (посылок) - слева направо по соответствующим спискам задачи Z_N. Если $v = m_N$, то происходит однократный просмотр всех вхождений логических символов φ в F (слева направо); если же $v = m_N + 1$, то — серия таких просмотров, в процессе которых значение текущего уровня задачи Z_N полагается последовательно равным $0, 1, \ldots, m_N$. Для каждого рассматриваемого вхождения логического символа φ в F осуществляется обращение к программе логического символа φ (исходные данные этой программы содержат полную информацию о координатах вхождения символа φ в задачу Z_N). Если процедура не внесла существенных изменений в текущую ситуацию, то переход к рассмотрению очередного вхождения логического символа, иначе — к пункту 2. Если просмотр терма F закончился безрезультатно, то вес его увеличивается на 1 (новые либо видоизмененные посылки и условия задачи получают вес 0). Если просмотр всех условий и посылок задачи Z_N закончился безрезультатно, то текущий уровень задачи Z_N увеличивается на 1. Если в результате он становится больше, чем максимальный уровень M_N, то на задачу Z_N выдается отказ, иначе — переход к пункту 1.

Использование весов посылок и условий позволяет сузить область просмотра при поиске очередного приема, исключая из нее посылки и условия, имеющие большой вес (они уже были достаточно хорошо рассмотрены ранее, и срабатывание связанного с ними приема маловероятно). В результате происходит локализация рассмотрения задачи, направляемого в первую очередь на новые либо видоизмененные посылки и условия; рассмотрение же всей задачи в целом имеет место, как правило, лишь на начальном этапе ее решения. По мере повышения текущего уровня m_N задачи Z_N в просмотр вовлекаются ранее отложенные посылки и условия F, вес v которых больше m_N; это происходит при $v = m_N+1$ (см. пункт 3), причем предварительно осуществляется поиск приема, срабатывающего при рассмотрении F для меньших, чем m_N, значений текущего уровня. Переключение внимания при рассмотрении задачи может происходить также в результате срабатывания приемов, уменьшающих веса тех или иных условий и посылок.

3. Запуск решения задачи и его пошаговый просмотр

Запуск решения задачи происходит из просмотра списка задач некоторого концевого раздела задачника. Войдя в этот список и создав в нем новую задачу либо выбрав для решения одну из ранее имевшихся задач, следует прежде всего добиться, чтобы верхняя горизонтальная линия данной задачи была прорисована на экране, а верхняя линия предыдущей задачи — не была видна на экране. Альтернативный способ — выделение нужной задачи нажатием правой кнопки мыши на ее поле (чтобы задача оказалась выделена, ее верхняя горизонтальная линия опять же должна быть видна на экране), после чего можно произвольно перемещаться по списку задач и выполнять запуск выделенной задачи из любой его точки.

Если требуется получить ответ задачи без отображения процесса решения, то нажимается клавиша “о” (кир.). Если на задачу будет получен ответ, то он будет прорисован в верхней части экрана, с указанием времени решения (в секундах либо минутах), а также с указанием трудоемкости, измеряемой в числе шагов работы интерпретатора языка ЛОС (этот язык нижнего уровня, используемый для записи приемов, описывается в последующих разделах книги). Ответ и трудоемкость сохраняются в файлах задачника и впоследствии будут прорисовываться непосредственно под условием задачи (время решения не сохраняется). Для исключения их из файлов следует выделить задачу (правой кнопкой мыши) и нажать “Ctr-F4”. Если ответ на задачу не получен, то происходит перерисовка ее текста с указанием под ним времени, затраченного на решение.

Если нужно отображать процесс решения по шагам, то нажимается клавиша “р” (кир.). Каждый последующий шаг обеспечивается нажатием “Enter”. Если в некоторый момент нужно оборвать пошаговое отображение решения и далее решать задачу до получения ответа, то нажимается клавиша “0” (ноль). Если нужно вообще прервать решение, то нажимается клавиша “Esc”, возвращающая к тексту задачи в задачнике.

При показе очередного шага решения в верхней части экрана прорисовывается описание текущего действия. Над этим описанием отображается вся цепь задач (кроме фиктивной исходной задачи)- сначала идет выбранная из задачника задача (возможно, измененная в процессе решения по сравнению с ее первоначальной версией, оставшейся в задачнике), затем вспомогательная задача, к которой произошло обращение от первой задачи, и т.д. Под последней задачей этой цепи задач и размещается описание текущего действия. При просмотре всех этих записей применяется та же прокрутка, что и при просмотре списка задач в задачнике.

Отображаемые на экране задачи приводятся с теми же сокращениями, что и в задачнике (для включения либо выключения полного просмотра нажимается клавиша “ы”). Кроме того, в просматриваемой цепи задач могут встречаться “замаскированные” под задачи обращения к вспомогательным процедурам (пакетным операторам, см. описание языка ГЕНОЛОГ), не являющиеся задачами. Такие вспомогательные операторы введены из соображений оптимизации: каждый из них содержит в себе сравнительно небольшое число приемов, и поиск нужного приема в нем ускоряется на порядок по сравнению с поиском по всей базе приемов. Типы этих операторов аналогичны типам задач: проверочный оператор является аналогом задачи на доказательство, нормализатор — аналогом задачи на преобразование, синтезатор — аналогом задачи на описание и анализатор — аналогом задачи на исследование.

Под кадром, содержащим описание текущего действия, могут быть размещены несколько кадров со вспомогательными задачами — эти задачи решались в процессе выполнения данного действия. Можно повторно запустить решение любой из них — выделив ее либо разместив ее верхнюю линию в верхней части экрана и нажав “Enter”. Эту процедуру можно применять любое число раз и внутри пошагового просмотра решения вспомогательных задач — таким образом создается подобие гипертекста решения. Для возвращения на предыдущий уровень данного гипертекста нажимается клавиша “End”.

Комментарии к очередному действию решателя размещаются в скобках после описания этого действия. Вспомогательные задачи, сопровождающие текущее действие, также снабжаются комментарием, размещаемым в скобках перед описанием задачи. Иногда эти комментарии специально подготовлены для объяснения примененного приема, иногда они просто представляют собой подзаголовок того раздела оглавления базы приемов, в котором размещен примененный прием.

Если комментарий недостаточен для понимания выполненного действия или вообще непонятен (такое может случиться, если комментарий просто является подзаголовком концевого пункта оглавления приемов — некоторые из этих подзаголовков понятны только в контексте заголовков внешних разделов), то можно перейти к просмотру описания сработавшего приема. Конечно, здесь понадобится знакомство с языками, на которых задаются приемы решателя — ЛОСом и ГЕНОЛО́Гом (им посвящены последующие разделы книги). Для этого нажимается клавиша "б", переводящая в просмотр приема (если прием реализован на языке ГЕНОЛОГ) либо (если прием реализован на языке ЛОС) переводящая в тот концевой пункт оглавления программ, который связан с последней пройденной перед реализацией приема контрольной точкой. В обоих случаях можно также просмотреть ЛОС-программу примененного приема, нажав клавишу "ф" — она переводит в отладчик ЛОСа. Для возвращения в просмотр текущего действия решателя из просмотра описания приема на ГЕНОЛОГе следует нажать клавишу "End". Для возвращения из просмотра ЛОС-программы приема следует нажать клавишу "з".

При просмотре текущего шага решения можно посмотреть исходную задачу в задачнике, не прерывая процесса решения. Для этого достаточно нажать клавишу "Home"; возвращение к просмотру текущего шага решения из задачника — по нажатии "End".

Если при пошаговом просмотре возник промежуточный результат, представляющий самостоятельный интерес (даже в случае, когда ответ на решаемую задачу так и не будет получен), то можно выделить этот результат (целую формулу или ее часть, одну или несколько) — так же, как это делалось в задачнике, перейти в задачник (через "Home") и зарегистрировать выделенную формулу в любой из задач или введя новый бланк задачи. Как и обычно, для этого следует войти в формульный редактор и нажать "Insert" - "N", где N — номер выделенного элемента среди всех выделенных элементов; $1 \leq N \leq 9$. Далее можно нажать "End" и продолжить просмотр шагов решения.

Если возникла необходимость прервать процесс пошаговой трассировки решения некоторой задачи из цепи задач и перейти к очередному шагу для ее надзадачи, то следует выделить (правой кнопкой мыши) данную надзадачу и нажать "Enter". Тогда следующий отображаемый на экране шаг будет относиться уже к выбранной надзадаче.

Если требуется прервать затянувшийся шаг решения задачи, то нажимается клавиша "Break". В результате появится текст текущего выполняемого фрагмента ЛОС-программы, в котором текущий (еще не выполненный) оператор выделен малиновым цветом. Далее возможен анализ текущей ситуации с помощью средств отладчика ЛОСа (см. последующие разделы) либо возвращение в главное меню при нажатии клавиши Esc. Можно также просмотреть текущую цепь задач (нажатием клавиши "з") либо (до нажатия "з" либо вернувшись из просмотра цепи задач в ЛОС-программу нажатием "ф") запустить процесс пошаговой трассировки на уровне той задачи, которая при прерывании оказалась текущей. Это делается нажатием клавиш "пробел" и "Enter".

Иногда пошаговый просмотр решения оказывается неудобен из-за того, что на некотором этапе начинается решение трудоемкой вспомогательной задачи, обращение к которой не было вынесено в самостоятельный шаг. Разумеется, по завершении этого решения и отображении срабатывания приема, в рамках которого оно происходило, решение вспомогательной задачи можно повторить для ознакомления с подробностями. Однако, длительная пауза из-за неотображаемого процесса решения может оказаться нежелательной. В таких случаях можно повторно запустить пошаговый просмотр решения, изменив его режим непосредственно перед появлением паузы. Для выбора нужного режима трассировки следует нажать клавишу "т" (это делается либо до запуска решения, из задачника, либо уже в начатом процессе трассировки). После нажатия появляется диалог установки режима.

Для ввода либо отмены условия на трассировку, определяемого в одном из пунктов диалога, следует переместить курсор мыши внутрь прямоугольника этого пункта и нажать левую клавишу мыши (наличие плюса справа от прямоугольника означает, что условие включено, иначе — выключено). После выбора необходимой комбинации условий, курсор мыши перемещается в прямоугольник "Ввести" и снова нажимается левая клавиша мыши.

Для преодоления указанных выше пауз можно воспользоваться пунктом "ручной выбор входа в подпроцесс". Если этот пункт активирован, то каждая попытка обращения решателя к вспомогательной задаче (включая наиболее крупные пакетные операторы) будет вводиться на экран. Чтобы продолжить решение без входа в пошаговую трассировку этой вспомогательной задачи, нажимается "Enter" ;чтобы войти в нее, нажимается "Ctr-Enter". Заметим, что в этом режиме текущее действие решателя не сопровождается выдачей списка вспомогательных задач, решенных для его выполнения — сообщения об обращениях к этим задачам уже выдавались на экран до осуществления действия, и была возможность просмотреть их решение по шагам. Недостатком режима с ручным входом в подпроцессы является чрезмерное количество выдаваемых на экран сообщений о попытках решения вспомогательных задач, бóльшая часть которых оказывается неудачной. Действительно ценные шаги тонут в этом потоке сообщений. Поэтому данный режим является лишь техническим, в обычных ситуациях отключенным.

Отладочные режимы трассировки описываются в разделе, посвященном отладчику ЛОСа. С помощью этих режимов можно, в частности, обеспечить прерывание процесса решения при попытке применения заданного приема, что часто используется при оптимизации его решающих правил.

Возможен серийный запуск решения задач из задачника. Такой запуск бывает необходим для контроля за изменениями в поведении решателя при его обучении. Простейшая форма этого запуска — выбор в оглавлении задачника нужного подраздела и нажатие клавиши “Ctr-з” либо клавиши “Ctr-э”. В первом случае из цикла решения будут исключены все задачи, которые при предыдущем запуске решателем не были решены; во втором случае будут решаться все задачи подряд.

При серийном решении последовательно решаются сначала все задачи из текущего пункта просматриваемого меню (выделенного в момент запуска) оглавления задачника, затем — все задачи из следующего пункта этого меню, и т.д. до конца подраздела. На экране при этом последовательно сменяются формулировки решаемых задач. Если решатель слишком долго решает какую-либо задачу (возможно, “залипает” на ней из-за плохих решающих правил), то последовательное нажатие клавиш “Break” и “Esc” переводит в решение следующей задачи. Если до конца решения всех задач подраздела произойдет “зависание” программы и понадобится ее перезапуск, то после перезапуска автоматически восстанавливается прерванный цикл решения задач — вплоть до достижения конца меню.

Для обрыва серийного режима следует нажать клавишу “Break” (на экране появится фрагмент ЛОС-программы, в котором произошло прерывание, и установится пошаговый режим отладочной трассировки), и далее — нажать клавишу “Ctr-з”. Лишь после этого нажатие клавиши “Esc” выведет в главное меню.

По окончании серийного запуска обновляется статистика о результатах решения задач подраздела. Такая статистика позволяет находить “особые точки” в задачнике (например, выявлять задачи, которые перестали решаться или решение которых замедлилось после внесенных в приемы изменений). Для просмотра статистики следует войти в меню нужного подраздела и нажать клавишу “з”. После небольшой паузы, необходимой для просмотра всех задач подраздела, на экране возникает таблица, в которой указываются следующие сведения:

а) Пять наибольших величин замедления в решении задач по сравнению с предыдущим запуском. Эти величины измеряются в числе шагов интерпретатора ЛОСа, как и величины трудоемкости решения задач, сохраняемые в задачнике — отсюда легко извлекается процент замедления. Если нужно просмотреть имеющие самые большие значения замедления задачи, то нажимается клавиша "з", переводящая в просмотр первой из этих задач. Переход к очередной задаче (отобранные для просмотра задачи упорядочены по убыванию замедлений) осуществляется нажатием клавиши "ш". Для просмотра в таком режиме отбираются не более 40 задач подраздела (это же ограничение распространяется на другие приводимые ниже случаи отбора серий задач).

б) Число нерешенных задач раздела. Для просмотра этих задач нажимается клавиша "н". Чтобы перейти к просмотру очередной нерешенной задачи, следует нажать "ш".

в) Число утерянных решений задач подраздела (только по сравнению с предпоследним циклом решения). Для просмотра серии таких задач сначала нажимается "у", и далее — через нажатия "ш".

г) Пять наибольших величин ускорения в решении задач. Просмотр задач с ускорившимся решением — через нажатие клавиши "с", и далее к каждой следующей задаче — через нажатие "ш".

д) Суммарное замедление в решении задач подраздела (отрицательная его величина означает суммарное ускорение).

е) Число изменившихся по сравнению с предпоследним циклом решения ответов на задачи подраздела. Для просмотра серии соответствующих задач сначала нажимается клавиша "и", и далее — через нажатия "ш".

ж) Число сомнительных ответов. Для просмотра серии соответствующих задач — нажатие "о", и далее — через "ш".

з) Число задач, замедлившихся более чем на 10000 шагов интерпретатора ЛОСа, и число задач, замедлившихся более чем на 100000.

и) Можно просмотреть список всех ответов на задачи подраздела. Для этого нажимается клавиша "О". Если на выделенном ответе нажать клавишу "курсор вправо", то происходит переход к просмотру условия соответствующей задачи.

к) Пять наибольших величин трудоемкости решения задач подраздела (в числе шагов интерпретатора). Для просмотра задач в порядке убывания трудоемкости (не более 40 задач) — нажатие "т", и далее — через "ш".

Серийный запуск позволяет косвенно оценивать "холостой ход" приема — суммарную трудоемкость попыток его применения, не приводивших к срабатыванию приема. Фактически здесь оценивается относительная трудоемкость попыток применения приема на одно его срабатывание. Чтобы получить такую статистику, требуется запустить серийное решение не через “Ctr-з”, а через “Ctr-х” (кир.). Тогда в указанной выше таблице статистики будут отображены данные о пяти наихудших случаях такой относительной трудоемкости (“холостого хода”). Эти данные суть пары (суммарная трудоемкость попыток применить прием — число срабатываний приема), для которых отношение первого элемента ко второму (если второй равен 0, то вместо него берется 1) наибольшее. Возможен просмотр серии наихудших приемов (по убыванию указанной характеристики) — через нажатие клавиши “х” (кир.). Переход к каждому очередному приему — через “ш”. При просмотре приема повторный вызов на экран указанной пары чисел — через “Х” (кир.); пара (A_1, A_2) прорисовывается в виде двух термов — “пассив(A_1)” и “актив(A_2)”.

4. Параллельная прокрутка решателя по задачнику

Прокрутку по задачнику можно распараллелить. Для этого следует заблаговременно создать в той же директории, где находится файл logsyst.exe, поддиректории EX1,EX2,...,EXn. Число n не превосходит уменьшенного на 1 числа потоков, реализуемых процессором машины. При этом оно не должно превосходить 23. В названии поддиректорий сначала n записывается как цифра от 1 до 9, а далее — как латинская буква начиная с a. “Наибольшая” допустимая буква — n.

В каждой поддиректории EXn полностью копируются все директории GEN, INF, LOS, TER, TXT, TCH. К ним добавляется файл logsyst.exe, в названии которого буква t заменена числом (или буквой) n.

Для корректной прокрутки следует установить на компьютере пакет AutoIt, который бесплатно скачивается в интернете. Он необходим для автоматического перезапуска программой fenix.exe тех потоков, в которых при прокрутке произойдет непредвиденный сбой. Кроме того, нужно позаботиться, чтобы Windows не заблокировала главному потоку доступ к боковым потокам (установить для всех потоков разрешение доступа “Все”).

Собственно запуск параллельной прокрутки по задачнику начинается с того, что в некотором (возможно, корневом) меню клавишей Ctr-1 выбирается начальный раздел прокрутки, а затем клавишей Ctr-2 — последний раздел. В случае корневого меню не рекомендуется выбирать последним раздел с номером, большим 17. Если используются 2 машины, нажимается Ctr-3, если 3 машины — Ctr-4. Иначе нажатие пропускается. Далее нажимается Ctr-л. На экране появятся небольшие окна для потоков, в которых будет отображаться текущая трудоемкость задачи. Отобранные задачи распределяются по этим потокам равномерно, и каждая порция прокручивается независимо. По мере завершения прокрутки окна потоков исчезают. Если поток остановлен операционной системой, а программа fenix.exe его не перезапустила, такой перезапуск необходимо выполнить вручную. Главный поток, после завершения прокрутки, приобретает зеленый цвет. Пока все потоки не завершатся, возвращение в однопотоковый режим не происходит. Перед возвращением выдерживается пауза, необходимая для пересылки данных из боковых потоков в главный. Дальнейший анализ итогов прокрутки — такой же, как в последовательном режиме прокрутки.

5. Упражнения по вводу и решению задач

Ввести перечисленные ниже задачи в соответствующие разделы задачника и просмотреть процесс их решения.

5.1. Элементарная алгебра

1) Упростить выражение:

$$\sqrt{\frac{4}{x}+\frac{1}{4x^{-1}}-2}+\sqrt{\frac{1}{4x^{-1}}+\frac{2^{-2}}{x}+\frac{1}{2}}$$

2) Решить уравнение:

$$\frac{x^2}{x+2}+1=\frac{4}{x+2}$$

3) Решить неравенство:

$$\frac{\sqrt{x^2+x-6}+3x+13}{x+5}>1$$

4) Решить систему уравнений:

$$\left\{\begin{array}{lcl}(x+y)(x^2-y^2) & = & 16\\ (x-y)(x^2+y^2) & = & 40.\end{array}\right.$$

5) Решить уравнение:

$$(tgx)^{\cos^2 x}=(ctgx)^{\sin x}$$

6) Решить неравенство:

$$|x-2|^{\log_4(x+2)-\log_2 x} < 1$$

7) Для всех a решить неравенство $ax^2+(a+1)x+1>0$.

8) При каких a неравенство $\sin^6 x+\cos^6 x+a\sin x\cos x \geq 0$ выполнено для всех значений x?

9) Найти все a, при которых из неравенства $x^2-a(1+a^2)x+a^4<0$ следует неравенство $x^2+4x+3>0$.

10) При каких a система

$$\begin{cases} x^2+y^2 &= 2(1+a) \\ (x+y)^2 &= 14 \end{cases}$$

имеет ровно два решения?

5.2. Указания

1) Находясь в главном меню, выбрать пункт "Оглавление задачника" (клавиша "з" либо левая кнопка мыши в прямоугольнике указанного пункта). Используя клавиши курсора, найти в корневом меню оглавления раздел "Элементарная алгебра" (возможно, сначала понадобится несколько раз нажать "курсор влево"). Войти в этот раздел, далее войти в подраздел "Упрощение выражений", затем — в любой из подразделов "Упрощение иррациональных выражений — 1,2,3". В действительности выбор раздела несущественен; решатель будет работать вне зависимости от того, в каком разделе находится задача, и классификация задач по разделам нужна лишь для упрощения поиска нужной задачи вручную. Используя "PageDown" либо "курсор вниз", вывести на экран последний пункт выбранного концевого раздела (все его пункты - номера с тремя штрихами). Затем нажать клавишу "к" (кир.) для создания бланка новой задачи. Далее нажимается "ц" и в оглавлении типов целевых установок выбираются разделы "Преобразовать выражение" — "Упростить выражение в области допустимых значений", причем после выбора последнего пункта нажимается "курсор вправо". Экран расчищается, и в верхней его части возникает текст "Упростить в о.д.з. выражение:". Далее нажимается "Enter", и формульным редактором вводится упрощаемое выражение. В процессе набора можно получать справки о клавиатуре формульного редактора, нажимая F1. Точнее, нажатие F1 переводит в общее оглавление

справочника по системе, и из его корневого меню нужно перейти в раздел “Формульный редактор”. Далее полезно прочитать раздел “общие сведения”; для получения информации о вводе конкретных символов — переходить в соответствующие подразделы. Чтобы вернуться в набор формулы, достаточно нажать “End”. По завершении набора упрощаемого выражения нажимается “Enter”. В данном примере задача оказывается полностью введенной, и для решения ее без пошаговой трассировки нажимается “о” (кир.), а для входа в пошаговую трассировку (она отображает лишь верхний уровень процесса решения — срабатывания приемов; такую трассировку, в отличие от отладочной трассировки, называем далее семантической) нажимается “р”. Каждый очередной шаг трассировки — нажатие “Enter”. Если в некоторый момент под кадром, поясняющим текущее действие, оказываются расположены другие кадры, то эти последние суть кадры обращений к вспомогательным задачам, решавшимся для выполнения текущего действия. Можно выбрать любой из них для детального просмотра решения вспомогательной задачи. При этом верхняя отделяющая линия кадра должна быть в точности верхней границей экрана; такое выравнивание обеспечивается клавишами “Ctr-курсор вверх либо вниз”. Вход в решение вспомогательной задачи — нажатие “Enter”. По завершении трассировки решения вспомогательной задачи нажатие “Enter” возвращает на предыдущий уровень (такое возвращение можно обеспечить в процессе трассировки нажатием “End”).

2) Действия аналогичны предыдущим, но выбирается раздел “Элементарная алгебра” — “Решение уравнений” — “Рациональные уравнения 1,2”. Нажимаются “к”, “ц”, и выбирается раздел оглавления целевых установок “Найти значения неизвестных” — “Получить полное явное описание значений неизвестных”. На экране появляется текст “Найти”, под которым размещен курсор формульного редактора. Этим редактором вводятся неизвестные задачи (отделенные запятой) — в данном примере единственная переменная x. После нажатия “Enter” ввод целевой установки завершается. Для ввода уравнения снова нажимается “Enter”, и далее происходит набор уравнения.

3) Действия аналогичны предыдущим, но выбирается подраздел для неравенств.

4) Для ввода системы уравнений и (или) неравенств сначала вводится целевая установка (аналогично предыдущему, но число неизвестных может быть более одной). Затем по отдельности вводятся условия —

уравнения и неравенства; ввод каждого нового условия начинается с “Enter” и завершается “Enter”. После ввода последнего условия задача готова к запуску решателя.

5) Аналогично задаче 2; тригонометрические операции вводятся последовательным набором двух (в особых случаях трех) первых латинских букв обозначения этих операций: синус — s,i; косинус — c,o; тангенс — t,g; котангенс — c,t, и т.д. Заметим, что степень тригонометрической операции набирается нестандартным образом: сначала набирается вся операция, затем — курсор вверх, затем — показатель степени и “Enter”. Тригонометрическая операция относится к наименьшему расположенному после нее осмысленному выражению (суммы и произведения под такой операцией следует заключать в скобки), и степень оказывается относящейся не к аргументу операции, а ко всей операции.

6) Аналогично задаче 3; вертикальные отрезки модуля вводятся с помощью клавиш “Ctr-м” (лат.), для ввода логарифма последовательно вводятся буквы l,o, после чего набирается основание логарифма. После набора основания нажимается “Enter”, и набирается выражение под логарифмом (суммы и произведения следует заключать в скобки).

7) Аналогично предыдущей задаче; параметр a не включается в число неизвестных задачи, и никак более не выделяется.

8) Неизвестной задачи служит переменная a. Условие ее набирается в виде
$$\forall_x(x - \text{число} \to \sin x^6 + \cos x^6 + a \sin x \cos x \geq 0).$$
Для ввода “x – число” сначала вводится x, затем нажимается /, затем “ч”.

9) Аналогично предыдущему; условие набирается в виде:
$$\forall_x(x^2 - a(1 + a^2)x + a^4 < 0 \to x^2 + 4x + 3 > 0.$$
Заметим, что понятие “следует” здесь трактуется таким образом, что если левая от стрелки часть ложная (в частности, неравенство слева вообще не имеет решений), то вся импликация истинна. Это приводит к тому, что концевые точки указанного в ответе промежутка (для них левое неравенство не имеет решений) отнесены к ответу.

10) Условие задачи состоит в том, что множество пар (x, y), удовлетворяющих уравнениям, имеет мощность 2. Оно записывается в виде

$$card(set_{xy}(x^2 + y^2 = 2(1 + a)\ \&\ (x + y)^2 = 14)) = 2.$$

5.3. Планиметрия

1) Основание равнобедренного треугольника равно a, угол при вершине равен b. Найдите биссектрису, проведенную к боковой стороне.

2) В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC имеем $AD = 3$, $BC = 1$. Точка P лежит на стороне AB, а точка Q — на стороне CD, причем отрезок PQ параллелен основаниям и проходит через точку пересечения диагоналей трапеции. Найти длину отрезка PQ.

3) Известно, что $ABCD$ — ромб и радиусы окружностей, описанных около треугольников ABC и ABD соответственно, равны R и r. Найти площадь ромба $ABCD$.

4) В параллелограмме $ABCD$ биссектриса угла BAD пересекает сторону CD в точке M, причем $DM/MC = 2$. Известно, что угол CAM равен a. Найти угол BAD.

5) Окружность проходит через вершины A и C треугольника ABC, пересекает сторону AB в точке D и сторону BC в точке E. Известно, что $AD = 5, AC = 2\sqrt{7}, BE = 4, BD/CE = 3/2$. Найти угол CDB.

5.4. Указания

1) Вычислительные задачи по геометрии вводятся в следующем порядке: сначала набираются посылки задачи, перечисляющие известные свойства чертежа; затем вводится целевая установка задачи; затем указываются неизвестные величины, которые должны быть вычислены. Перед набором посылок можно ввести чертеж, однако чертеж может быть создан системой и автоматически (по окончании набора задачи нажимается “Ctr-ч”).

   При наборе посылок следует обязательно обозначить все точки, участвующие в задаче, буквами (обычно большими; можно использовать натуральные индексы). Ссылаться на плоские фигуры (треугольники, многоугольники, окружности, прямые, и т.д.) можно только через их “базисные” точки. В нашем случае обозначим вершины треугольника буквами A, B, C и введем первую посылку “$\triangle(ABC)$”. Для ввода посылки нажимается “Enter”, затем последовательно нажимаются клавиши “т”, “р” (обычно используются первые две буквы вводимого понятия). Это приводит к прорисовке символа $\triangle$ с расположенной после него открывающей скобкой. Далее последовательно нажимаются A,B,C и закрывающая скобка, после чего — завершающее набор формулы "Enter". Никакие разделители между буквами не ставятся. Заметим, что если в обозначении треугольника либо другой фигуры используется буква с индексом, то после такой буквы, перед набором следующей, обязательно нужно нажать на клавишу "умножение" (звездочка).

После ввода первой посылки (она указывает только на то, что три точки A, B, C образуют вершины некоторого треугольника, то есть не лежат на одной прямой) нужно ввести посылку, определяющую, что треугольник равнобедренный. Выберем в качестве основания треугольника вершины A, C и введем посылку $l(AB) = l(BC)$. Для обозначения расстояния дважды нажимается клавиша "l", что приводит к появлению рукописной латинской буквы l с идущей после нее открывающей скобкой. Затем (как в обозначении треугольника) подряд вводятся буквы для точек, между которыми рассматривается расстояние, и ставится закрывающая скобка.

Далее вводятся: посылка $l(AC) = a$, обозначающая длину основания треугольника через a, и посылка $\angle(ABC) = b$ — для величины угла при основании. Чтобы получить обозначение угла, последовательно нажимаются клавиши "у", "г". Далее — как для обозначения треугольника. Как и обычно, вершина угла размещается в обозначении угла посередине.

Для ввода основания D биссектрисы треугольника ABC, проведенной из угла BAC, можно использовать посылку "Биссектреуг($BACD$)". Другой способ (более громоздкий, но не использующий специального обозначения "Биссектреуг") — пара посылок "$D \in$ прямая(BC)", "биссектриса($BACD$)". В первом случае нажимаем "И", "Т", и далее — как в случае обозначения треугольника, но для четырех букв. Во втором случае сначала вводим D, затем нажимаем пробел, b, e (лат.; появляется символ $\in$). Далее нажимаем "п", "р" (кир.; появляется слово "прямая" с открывающей скобкой), вводим буквы B, C и закрывающую скобку. Для ввода "биссектриса($\ldots$)" нажимаем клавиши "и", "т".

На этом ввод посылок завершен. Для ввода целевой установки нажимаем клавишу "ц", переводящую в оглавление типов целевых установок. Из корневого меню этого оглавления переходим к пункту "Найти значения неизвестных" — "Выразить значения неизвестных через заданные параметры". Заметим, что применявшийся в элементарной алгебре пункт "Получить полное явное описание значений неизвестных" в планиметрических задачах на вычисление НЕ следует использовать. Это объясняется принципиальным различием понятий "известная" и "неизвестная" в задачах из двух этих разделов. В элементарной алгебре все переменные из списка посылок по умолчанию считались известными и могли входить в ответ задачи. В геометрической задаче на вычисление посылки содержат обозначения точек $A, B, C, \ldots$, которые не должны появляться в ответе. Соответственно различаются и типы выбираемых целевых установок. После выбора указанного типа целевой установки нажимается "курсор вправо". Далее сначала вводится буква (или несколько отделенных запятыми букв) для неизвестной (неизвестных) и нажимается "Enter". Затем вводятся разделенные запятыми буквы для известных числовых параметров, через которые должны быть выражены неизвестные (если таких параметров вообще нет, сразу нажимается "Enter", иначе оно нажимается после ввода параметров). В нашем примере обозначим неизвестную длину биссектрисы через x; параметры суть a, b.

После ввода целевой установки вводим равенства, связывающие неизвестные (переменные) с теми выражениями, которые они обозначают и которые нужно вычислить. В ответ войдет сама неизвестная, а не обозначаемое ею выражение.

Как уже говорилось выше, после ввода задачи по планиметрии можно ввести чертеж — либо попробовать сделать это автоматически (нажатием "Ctr-ч"), либо ввести чертеж вручную (нажать "ч" и далее воспользоваться геометрическим редактором; чертеж появится перед списком посылок, в начале задачи). Можно также скорректировать вручную чертеж, созданный автоматически (вход в редактирование уже созданного чертежа — снова через "ч"; удаление чертежа — выделить его левой кнопкой мыши и нажать "Ctr-Del").

2) Напомним, что в решателе предусмотрены два варианта обозначения трапеции: "трапеция($ABCD$)" и "Трапеция($ABCD$)" — первый из них для случая трапеции с большим основанием AD и острыми углами при основании; второй — для случая, когда углы при основании не обязательно острые. В обоих случаях указанные записи предстввляют собой даже не обозначения трапеции, а лишь утверждения о том, что точки A, B, C, D являются вершинами соответствующей трапеции. Сама трапеция (как и любой другой четырехугольник) обозначается посредством выражения "фигура($ABCD$)". В нашем примере годится любой из указанных способов записи. Например, введем посылку "трапеция($ABCD$)". Затем вводятся по-

сылки $l(AD) = 3, l(BC) = 1$. Принадлежность точки P стороне AB, а точки Q — стороне CD, записываются в виде $P \in$ отрезок(AB), $Q \in$ отрезок(CD). Параллельность отрезка PQ основаниям трапеции записывается как прямая$(PQ)\|$прямая(AD). Чтобы сформулировать условие о том, что отрезок PQ проходит через точку пересечения диагоналей трапеции, нужно ввести обозначение для этой точки. Например, обозначим ее через M. То, что M является точкой пересечения диагоналей, записываем как $M \in$ прямая(AC), $M \in$ прямая(BD). Далее добавляем посылку $M \in$ отрезок(PQ). На этом ввод посылок завершается. Как и в предыдущей задаче, выбираем целевую установку и вводим единственное условие $x = l(PQ)$ для неизвестной x.

3) Начинаем со ввода посылки “ромб$(ABCD)$”. Так как в задаче речь идет об описанных окружностях, надо ввести обозначения для этих окружностей, то есть обозначить центр окружности и выбрать какую-либо точку на окружности (в планиметрии ссылки на окружности могут быть только такими). Например, обозначим центры через M, N. В случае описанной окружности, которая должна проходить через вершины треугольника, в качестве второй точки можно взять какую-либо вершину треугольника (например, A). Тогда добавятся посылки “окружность(MA) описана около фигура(ABC)”; “окружность(NA) описана около фигура(ABD)”. Заметим, что хотя эти тексты кажутся достаточно длинными, набираются они весьма малым числом нажатий клавиш: сначала нажимаем “о”, “к” (кир.) — появляется слово “окружность” с открывающей скобкой. Затем вводим буквы M, A и закрывающую скобку. Далее нажимаем “Ctr-ф” — появляются слова “описана около”. Наконец, нажимаем “ф”, “и” — появляется слово “фигура” с открывающей скобкой. В заключение вводим A,B, C и закрывающую скобку. Радиусы окружностей указываем с помощью посылок $l(MA) = R, l(NA) = r$. При вводе целевой установки указываем, что значение неизвестной x должно быть выражено через R, r. Наконец, набираем условие $x = S($фигура$(ABCD))$. Заметим, что знак площади S здесь вводится двукратным нажатием малой латинской буквы s; если его ввести нажатием клавиши большой латинской S, то задача окажется набранной неверно и не будет решена (вместо площади окажется введенным значение какой-то неопределенной функции S).

4) Вводятся посылки “параллелограмм$(ABCD)$”, “биссектриса$(BADM)$”, $M \in$ отрезок(CD), $l(DM)/l(MC) = 2$, $\angle(CAM) = a$. Затем выбирается целевая установка “Выразить x через a”, и вводится условие $x = \angle(BAD)$.

5) Вводятся посылки $\triangle(ABC)$, $C \in$ окружность(PA), $D \in$ окружность(PA), $D \in$ отрезок(AB), $E \in$ окружность(PA), $E \in$ отрезок(BC), $l(AD) = 5, l(AC) = 2\sqrt{7}, l(BE) = 4, l(BD)/l(CE) = 3/2$. Затем вводятся целевая установка и условие $x = \angle(CDB)$.

5.5. Математический анализ

1) Вычислить производную функции

$$\frac{e^{-x^2}\arcsin(e^{-x^2})}{\sqrt{1-e^{-2x^2}}} + \frac{1}{2}\ln(1-e^{-2x^2})$$

2) Вычислить предел функции

$$(2e^{\frac{x}{x+1}} - 1)^{\frac{x^2+1}{x}}$$

при $x \to 0$.

3) Исследовать поведение функции $y = (x-5)\sqrt[3]{x^2}$.

4) Найти точки экстремума для функции $y = x^2 - ln(x^2)$.

5) Исследовать на непрерывность функцию $y = \operatorname{arctg}(1/x + 1/x - 1 + 1/x - 2)$.

6) Найти неопределенный интеграл

$$\int \frac{2\sin x - \cos x + 3}{3\sin x + \cos x + 1} dx$$

7) Вычислить определенный интеграл

$$\int_0^{ln2} \sqrt{e^x - 1} dx$$

8) Вычислить двойной интеграл от $\sqrt{|x - y^2|}$ по области $(x, y) : |y| \leq 1, 0 \leq x \leq 2$.

9) Найти площадь области, заключенной между параболой $y^2 = \frac{b^2}{a}x$ и прямой $y = \frac{b}{a}x$; $0 < a, 0 < b$.

10) Найти объем тела $x^2 \leq ay \leq bx, x^2 + y^2 \leq hz \leq 2x^2 + 2y^2$; $0 < a, 0 < b, 0 < h$.

11) Найти площадь поверхности $z = xy, x^2 + y^2 \leq R^2$.

12) При каких значениях параметра p сходится ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^p} \sin \frac{\pi}{i}?$$

13) Разложить в ряд Тейлора по переменной x в точке 0 функцию

$$y = (x - \operatorname{tg} x) \cos x$$

14) Разложить в ряд Фурье на отрезке $[-\pi, \pi]$ функцию $y = (\pi^2 - x^2)^2$.

15) Найти сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2 + 3n + 1}{n^3 (n+1)^3}.$$

5.6. Указания

1) Прежде всего нужно войти в оглавление целевых установок и выбрать пункт “Упростить выражение в области допустимых значений”. Затем набирается производная указанного выражения. Она вводится как дробь вида $\frac{dA}{dx}$; A - дифференцируемое выражение. После символа d нужно ставить знак умножения; дифференцируемое выражение заключается в скобки. В принципе, переменную d можно использовать и внутри выражения A, и даже взять ее в качестве x. Если нужно найти значение производной в некоторой точке t, то вместо dx набирается $d(x = t)$, причем и здесь после d ставится знак умножения.

2) Снова вводится установка “Упростить выражение в области допустимых значений”. Затем набирается условие: сначала нажимаются клавиши l, i — появляется символ lim, справа внизу от которого размещен курсор. Набираем $x \to 0$ (стрелка вводится клавишей “курсор вправо”) и нажимаем Enter — курсор перемещается вверх в ту же строку, в которой расположен символ lim. Здесь набираем выражение под знаком предела. Это выражение обязательно нужно заключить в скобки, иначе знак предела будет отнесен к минимальному осмысленному его началу. В нашем примере, если не заключить все выражение в скобки, то степень окажется вне предела и ответ будет другим.

3) Выбирается целевая установка “Исследовать поведение функции”, в которой указывается обозначение функции — переменная y. Затем вводится условие $y = \lambda_x((x-5)\sqrt[3]{x^2}, x - \text{число})$.

4) Выбираем переменные, которые будут обозначать, соответственно, точку экстремума, значение функции в этой точке, и тип экстремума (максимум либо минимум). Например, пусть это будут переменные u, v, w. Вводим целевую установку “Найти полное явное описание значений неизвестных” в которой указываем выбранные неизвестные. Затем вводим условие

$$Extr(\lambda_x(x^2 - \ln(x^2), x - \text{число}), u, v, w).$$

Аналогично вводятся задачи на поиск множества точек минимума либо максимума некоторой функции внутри заданной области, но число неизвестных здесь будет равно двум (искомое множество точек и значение функции в этих точках). Вместо $Extr$ используются символы Min, Max, причем после функции должна быть указана область, по которой берется минимум или максимум.

5) Отличие от общего исследования поведения функции — только в том, что выбирается целевая установка “Исследовать функцию на непрерывность”.

6) Выбирается целевая установка “Упростить выражение в области допустимых значений”. Затем набирается неопределенный интеграл: нажимается “Ctr-j” и вводится подынтегральное выражение, которое умножается справа на произведение dx.

7) Аналогично неопределенному интегралу, но нажимается “Ctr-i”. Тогда курсор сначала оказывается под знаком интеграла, где набирается нижний предел. После нажатия “Enter” курсор переводится вверх, где набирается верхний предел. Еще одно нажатие “Enter” — и набирается подынтегральное выражение, умножаемое на dx.

8) При вычислении двойных интегралов область интегрирования обычно задается в списке посылок. Выбираем для нее обозначение - например, переменную P, и введем посылку $P = set_{xy}(|y| \leq 1 \ \& \ 0 \leq x \ \& \ x \leq 2)$. Затем вводим целевую установку “Упростить выражение в области допустимых значений”. Затем набираем двойной интеграл — нажимаем “Ctr-2”; под интегралом вводим обозначение области P, нажимаем “Enter”, и далее набираем подынтегральное выражение, умноженное на произведение $dxdy$.

9) Плоскую область определяем в списке посылок, обозначив ее вспомогательной переменной (например, P). Эту область задаем, используя ссылку на прямоугольную систему координат, которую тоже обозначаем вспомогательной переменной (например, K). После этого в

нашем примере вводим посылки

$$P = \text{точки}(\text{областьграницы}(set_{xy}(y^2 = \frac{b^2}{a}x) \cup set_{xy}(y = \frac{b}{a}x)), K),$$

$0 < a$, $0 < b$, "прямкоорд(K)". Заметим, что операция "областьграницы" применяется к теоретико-множественному объединению пар координат точек кривых, ограничивающих область, а значением этой операции служит множество пар координат точек области. Для перехода от пар координат к точкам плоскости используется операция "точки". Далее выбирается целевая установка "Упростить выражение в области допустимых значений" и вводится условие $S(P)$. Как и в случае геометрических задач, символ площади S вводится двойным нажатием клавиши s.

10) В случае нахождения объемов применяется аналогичная конструкция, но множество троек координат трехмерной области задается непосредственно, с помощью неравенств. В нашем примере вводим посылки $P = \text{точки}(set_{xyz}(x^2 \leq ay \ \& \ ay \leq bx \ \& \ x^2+y^2 \leq hz \ \& \ hz \leq 2x^2 + 2y^2), K)$, $0 < a$, $0 < b$, $0 < h$, "прямкоорд(K)". Целевая установка — та же, что и в предыдущем примере; условие имеет вид "объем(P)" (двукратное нажатие клавиши "О", кир.).

11) Посылки вводятся аналогично предыдущей задаче, причем вместо множества троек координат точек трехмерной области задается множество троек координат точек поверхности. Условие имеет вид $S(P)$.

12) Целевая установка при наличии параметров ряда — "Получить полное явное описание значений неизвестных" (при их отсутствии - "Проверить истинность утверждения"); неизвестная — параметр ряда p. Условие имеет вид утверждения о сходимости последовательности частичных сумм ряда:

$$\text{сходится}(\lambda_n(\sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{i^p}\sin\frac{\pi}{i}), n - \text{натуральное}))$$

13) Выбирается установка "Разложить в ряд Тейлора", в которой указываются переменная разложения и точка разложения. Условием задачи служит выражение $(x - \operatorname{tg} x)\cos x$.

14) Аналогично предыдущему — с установкой "Разложить в ряд Фурье".

15) Установка — "Упростить выражение в области допустимых значений". Условие задачи набирается непосредственно в виде бесконечной суммы.

5.7. Аналитическая геометрия и линейная алгебра

1) Даны три вектора $a(4,1,5)$, $b(0,5,2)$ и $c(-6,2,3)$. Найти вектор x, удовлетворяющий системе уравнений $(x,a)=18, (x,b)=1, (x,c)=1$. Система координат прямоугольная.

2) Даны координаты двух вершин треугольника $A(-1,3), B(2,5)$ и точки пересечения его высот $H(1,4)$ в прямоугольной системе координат. Найти координаты третьей вершины треугольника и составить уравнения его сторон.

3) Составить уравнения плоскостей, проходящих через прямую $\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{5} = \frac{z+2}{4}$ и равноудаленных от точек $A(1,2,5)$ и $B(3,0,-1)$.

4) Составить уравнение касательной к параболе $y^2 = -8x$, отрезок которой между точкой касания и директрисой делится осью Oy пополам. Система координат прямоугольная.

5) Найти уравнение плоскости, пересекающей эллипсоид $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 9$ по эллипсу, центр которого находится в точке $C(3,2,1)$. Система координат прямоугольная.

6) Поверхность задана уравнением $6xy - 8y^2 - z^2 + 60y + 2z + 89 = 0$ в прямоугольной системе координат. Найти каноническую систему координат и каноническое уравнение этой поверхности. Определить тип поверхности.

7) Решить матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 18 & 12 & 9 \\ 23 & 15 & 11 \end{pmatrix}$$

8) Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} \sin a & \cos a & \sin(a+d) \\ \sin b & \cos b & \sin(b+d) \\ \sin c & \cos c & \sin(c+d) \end{vmatrix}$$

9) Найти собственные значения и собственные векторы линейного преобразования, заданного матрицей:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

10) Найти каноническую жорданову форму для матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5.8. Указания

1) В задачах по аналитической геометрии обычно приходится вводить обозначение для используемой системы координат. Обозначим ее в нашем примере через K и введем посылку “прямкоорд(K)”. Напомним, что в решателе системы координат на плоскости отождествляются с тройками точек общего положения (первая точка — начало системы координат, две последние — концы координатных векторов), а в пространстве — с четверками таких точек. Если в задаче имеются ссылки на координатные оси либо плоскости, то приходится явным образом вводить такие тройки либо четверки точек. В нашем примере этих ссылок нет, поэтому далее вводим посылки, определяющие координаты векторов a, b, c относительно K: “коорд$(a, K) = (4, 1, 5)$”; “коорд$(b, K) = (0, 5, 2)$”; “коорд$(c, K) = (-6, 2, 3)$”. Затем вводим посылки “скалумнож$(a, x) = 18$”, “скалумнож$(b, x) = 1$”, “скалумнож$(c, x) = 1$”. Выбираем целевую установку “Выразить значения неизвестных через заданные параметры” и вводим переменную y для неизвестной. Наконец, вводим условие задачи “$y =$ коорд(x, K)”.

2) Вводим обозначение K для прямоугольной системы координат и заносим посылки “прямкоорд(K)”, $\triangle(ABC)$, “коорд$(A, K) = (-1, 3)$”, “коорд$(B, K) = (2, 5)$”. Чтобы определить H как точку пересечения высот, проводим две высоты - из вершины A и из вершины B. Это можно сделать, добавив две посылки “Высота($ABCM$)” и “Высота($BCAN$)”; M, N — основания высот. Далее добавляем посылки, связанные с точкой H: $H \in$ прямая(AM); $H \in$ прямая(BN); “коорд$(H, K) = (1, 4)$”. Выбираем в качестве неизвестных переменные x, y, z, v — для уравнений сторон треугольника и координат его третьей вершины. Наконец, создаем целевую установку (так же, как в предыдущей задаче) и вводим условия: $x =$ коорд(прямая(AB)$, K$), $y =$ коорд(прямая(AC)$, K$), $z =$ коорд(прямая(BC)$, K$),$v =$ коорд(C, K).

3) В этой задаче система координат не предполагается прямоугольной. Поэтому выбираем обозначающую ее переменную K, но никаких

специальных посылок для K не вводим. Так как в условии задачи говорится о прямой, а прямые в решателе обозначаются только с помощью пары точек, выбираем переменные P, Q для обозначения этих точек. После этого можно ввести посылку, задающую уравнение прямой: "коорд(прямая$(PQ), K) = set_{xyz}($пропорцнаборы$((x-1, y-1, z+2),(3,5,4)))$". Заметим, что использование отношения "пропорцнаборы" пропорциональности двух числовых наборов при задании канонического уравнения прямой в пространстве является для решателя стандартом. Чтобы обозначить плоскость, выбираем переменные C, D, E для трех точек общего положения на этой плоскости. Затем вводим посылку, выражающую включение прямой PQ в искомую плоскость: "прямая$(PQ) \subseteq$ плоскость(CDE)". Вводим посылки, определяющие координаты указанных в задаче точек A, B: "коорд$(A, K) = (1,2,5)$", "коорд$(B, K) = (3,0,-1)$". Наконец, указываем на равноудаленность плоскости CDE от точек A, B: "расстдоплоскости$(A,$ плоскость$(CDE)) =$ расстдоплоскости$(B,$ плоскость$(CDE))$". Затем вводим целевую установку (так же, как в предыдущих задачах), указывая в ней неизвестную x для координат плоскости CDE. Завершаем набор задачи условием $x =$ коорд(плоскость$(CDE), K)$.

4) Так как система координат прямоугольная, вводим посылку "прямкоорд(K)". Обозначаем параболу через E и указываем ее уравнение: "коорд$(E, K) = set_{xy}(y^2 = -8x)$". Выбираем обозначение "прямая(AB)" для касательной и вводим посылку "прямая(AB) – касательная к E". Для точки касания можно было бы выбрать специальное обозначение, однако без ограничения общности можно считать, что этой точкой служит точка A. Поэтому вводим посылку $A \in E$. Для директрисы вводим обозначение "прямая(FG)". Так как в решателе упоминание о директрисе связано с обязательным упоминанием фокуса, которому она соответствует, то выбираем обзначение C для фокуса и заносим посылки "фокус(C, E)", "директриса(прямая(FG),$C, E)$". В качестве точки пересечения касательной с директрисой можно без ограничения общности выбрать точку B; соответствующая посылка имеет вид $B \in$ прямая(FG). Для обозначения середины отрезка AB выбираем переменную D и заносим посылки $D \in$ отрезок(AB), $l(AD) = l(BD)$. Чтобы указать на принадлежность точки D оси ординат, вводим явное обозначение для тройки точек, образующих систему координат $K : K = (M, N, P)$. Теперь принадлежность точки D оси ординат записывается в виде $D \in$ прямая(MP). Чтобы предотвратить недопустимый в задаче случай совпадения прямой AB с осью ординат,

добавляем посылку $\neg(A \in \text{прямая}(MP))$. Далее вводим целевую установку (как в предыдущей задаче) с упоминанием неизвестной x и добавляем условие "$x = \text{коорд}(\text{прямая}(AB), K)$".

5) Вводим посылки "прямкоорд(K)" и "$\text{коорд}(E, K) = set_{xyz}(x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 9)$";
E — обозначение эллипсоида из условия задачи. Обозначаем искомую плоскость "плоскость(ABC)", а сечение ею эллипсоида — F, после чего вводим посылки $E \cap \text{плоскость}(ABC) = F$ и "эллипс(F)". Обозначив центр эллипса через D, добавляем посылки "центр(D, F)" и "$\text{коорд}(D, K) = (3, 2, 1)$". Далее вводим целевую установку с неизвестной x и условие "$x = \text{коорд}(\text{плоскость}(ABC), K)$".

6) Вводим посылку "прямкоорд(K)" и выбираем целевую установку "Исследовать свойства поверхности, заданной своим уравнением". В этой установке обозначаем исследуемую поверхность через E, и вводим условие задачи: "$\text{коорд}(E, K)$
$= set_{xyz}(6xy - 8y^2 - z^2 + 60y + 2z + 89 = 0)$".

7) Для решения матричного уравнения используем обычную целевую установку уравнений "Получить полное явное описание значений неизвестных". Для набора матрицы нажимаем клавиши "м", "а" (кир.) — появляется левая скобка матрицы. Затем вводится первая строка, причем после каждого элемента нажимается "Enter". Чтобы перейти к следующей строке, после набора последнего элемента вместо "Enter" нажимается "Page Down". После набор последней строки нажимается "End" — возникает правая скобка матрицы. Для отката в случае ошибочных действий при наборе матрицы используется "Backspace". После набора первой матрицы вводится обычный символ умножения (клавиша "звездочка"), затем X, затем снова умножение, далее — вторая матрица, и после знака равенства — третья. Преобразование умножения чисел в матричное умножение предпринимается автоматически при запуске решения задачи.

8) Для вычисления определителя выбирается целевая установка "Упростить выражение в области допустимых значений". При наборе условия сначала нажимаются клавиши "d", "e" (лат.) - возникает символ det. Затем вводится матрица.

9) Выбираем обозначение для матрицы — переменную A. Затем вводим посылку — равенство с переменной A в левой части и матрицей в правой. Выбираем в качестве неизвестных переменные x, y, z; x — собственное значение, y — его кратность, z - собственный вектор, отвечающий данному собственному значению. Затем выбираем

целевую установку “Получить полное явное описание значений неизвестных” для указанных неизвестных и вводим условия “собствзначение(A, x, y)”, “собствектор(A, x, z)”. В ответе для z приводится условие принадлежности множеству линейных комбинации базиса собственных векторов, соответствующих собственному значению x.

10) Выбираем целевую установку “Получить полное явное описание значений неизвестных” для неизвестных x (жорданова форма) и y (матрица, преобразующая к жордановой форме, т.е. такая, что произведение обратной к ней матрицы, исходной и снова матрицы y, равно x). Затем вводим условие “жордформа(A,x, y)”, где A — исходная матрица.

5.9. Дифференциальные уравнения

1) Решить уравнение

$$2(y - 2xy - x^2\sqrt{y}) + x^2y' = 0$$

2) Решить уравнение

$$xyy'' + xy'^2 - yy' = 0$$

3) Найти решения уравнения $y = xy' - 2y'^2$, проходящие через точку (4,2).

4) Найти решение системы дифференциальных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \frac{dx}{dt} & = & x - y + 4\cos(2t) \\ \frac{dy}{dt} & = & 3x - 2y + 8\cos(2t) + 5\sin(2t). \end{array} \right.$$

5.10. Указания

1) Выбираем целевую установку “Решить функциональные уравнения” (эта установка берется и для остальных задач на решение дифференциальных уравнений). В качестве неизвестной указываем уже не переменную y, а выражение $y(x)$. Затем вводим условие задачи — уравнение, в котором везде вместо функции y записывается ее значение $y(x)$ в точке x, а вместо производной y' - $\frac{dy(x)}{dx}$. Напомним, что по всем произвольным постоянным, возникающим при интегрировании уравнения, в ответе навешивается квантор существования.

2) Задача вводится аналогично предыдущей; производная второго порядка набирается в виде $\frac{d^2y(x)}{dx^2}$. Символ дифференцирования d здесь рассматривается как переменная — то есть после него или его степени нужно нажимать клавишу “звездочка” для умножения.

3) После ввода дифференциального уравнения добавляем условие $y(4) = 2$.

4) В целевой установке указываем две неизвестных функции - $x(t), y(t)$. Уравнения системы набираются аналогично предыдущим задачам; вместо x, y в них используются записи $x(t), y(t)$.

6. Логический калькулятор

Для ускоренного ввода и решения задач создан так называемый логический калькулятор. Вход в него происходит через пункт "Решить задачу" главного меню системы. После выбора нужного концевого пункта возникающего здесь оглавления нужно зайти в него нажатием "курсор вправо" и далее действовать согласно появляющимся инструкциям. В нижней части экрана размещаются сведения по набору формул рассматриваемого раздела. Если этих сведений недостаточно, следует нажать F1, перейти в справочник по системе и из его корневого меню использовать раздел "Формульный редактор". Иногда может быть полезен также раздел "Логический язык системы".

По завершении ввода задачи решатель сохраняет ее в разделе "Буфер — Последние задачи" оглавления задачника и сразу приступает к решению. После получения ответа либо отказа можно продолжить работать с сохраненной задачей стандартными средствами - запустить просмотр шагов решения, перенести задачу в другой раздел и т.п. Для расчистки буфера достаточно, находясь в любой точке задачника, нажать "Shift-о" ("о" кириллица).

Разумеется, возможности логического калькулятора ограничены текущими средствами решателя. Иногда они достаточно для решения задач стандартных типов, иногда — нет. Последние случаи даже более ценны, так как подсказывают возможности дальнейшего пополнения базы приемов.

7. Анализ траекторий решения задач при обучении решателя

Пополнение базы приемов решателя происходит при ручном обучении только за счет анализа траекторий решения задач. Создавать какие-либо приемы из общих соображений, без примерки на задачах, не рекомендуется. Велика вероятность того, что такой прием не будет использоваться решателем — либо из-за того, что он окажется избыточным и его срабатывание предвосхитят другие приемы, либо из-за того, что действия других приемов уведут задачу из области его применимости. Обучающий материал для решателей дают задачники, а не учебники.

Таким образом, чтобы научиться создавать решатели, прежде всего нужно овладеть техникой разбиения траектории решения задачи на последовательность применений приемов. Отсюда возникают исходные неформальные версии описаний приемов, которые затем уже записываются на ГЕНОЛОГе или на ЛОСе. Разумеется, для одной и той же задачи могут быть предложены сильно отличающиеся друг от друга способы решения, а для одного и того же решения — различные версии объясняющих его приемов. Наиболее простые и эффективные варианты не всегда удается "угадать" по единственному примеру, так что оптимизация решателя предполагает более или менее регулярные откаты для модернизации уже созданных групп приемов. Обычно эти откаты имеют локальный характер, а использование компилятора ГЕНОЛОГа делает их в техническом отношении не слишком дорогостоящими.

Рассмотрим несколько примеров анализа траекторий решения задач, в которых не будем предполагать наличия каких-либо ранее созданных приемов. Все эти задачи взяты из задачника решателя, и в качестве упражнения можно рекомендовать проследить по шагам его действия. Приводимые ниже рассуждения дают лишь первое, весьма приблизительное представление о разбиении решений на приемы. Реальное обучение решателя требует учета гораздо большего числа технических подробностей.

Начнем с простейшего примера — решения уравнения

$$\frac{6a+7b}{6a} - \frac{3bx}{2a^2} = 1 - \frac{bx}{a^2-ab}.$$

Первый шаг, который представляется естественным в этой задаче - группировка в левой части всех членов с неизвестной x, а в правой — всех известных членов. Этот шаг сразу подсказывает прием: если обе части числового уравнения имеют неизвестные либо известные слагаемые, то выполняется указанная выше перегруппировка членов. Уровень срабатывания приема можно взять совсем маленьким, например, равным 1. Для усиления стандартизации вводим еще один прием, переводящий неизвестную часть равенства влево, а известную — вправо. Уровень его пусть тоже будет равен 1. Каких-либо соображений об ограничении применения данных приемов не возникает. Однако, следует учитывать, что теперь на уровнях выше первого все уравнения будут иметь известные слагаемые только в правой части. Поэтому, например, шаблон для усмотрения квадратных уравнений должен иметь вид $ax^2 + bx = c$, вместо привычного $ax^2 + bx + c = 0$.

Итак, получаем уравнение:

$$\frac{bx}{a^2 - ab} - \frac{3bx}{2a^2} = 1 - \frac{6a + 7b}{6a}.$$

Следующий шаг — сложить дробные слагаемые в левой части уравнения. Формулируем соответствующий прием: "если левая часть уравнения имеет дробное слагаемое, то обращаемся к вспомогательной задаче на преобразование ее к виду дроби, после чего выполняем замену". Каких-либо оснований откладывать это действие не видно, так что уровень срабатывания приема снова выбираем равным 1. Целесообразность применения данного приема уже не столь очевидна, как в предыдущем случае. Сложение дробных выражений может привести к очень громоздкому результату, и задача будет заведена в тупик. С другой стороны, сразу привести условия, отделяющие допустимые применения от недопустимых, мы не можем. Чтобы возникли какие-то подсказки на этот счет, нужно все-таки ввести прием таким, как есть, и подождать появления задачи, в которой он будет мешать. Тогда и начнется накопление серии дополнительных эвристических ограничений, которые обеспечат должное управление приемом.

В нашем случае эта работа уже проделана — можно заглянуть в решатель и посмотреть, какие ограничения возникли. Прежде всего, оказалось, что для систем уравнений уровень срабатывания данного приема лучше положить равным не 1, а 3. Если нужно не складывать неизвестные дробные выражения, а обозначить их новыми неизвестными и решить полученную вспомогательную систему, то прием, выполняющий эти действия, успеет сработать. Если уравнение содержит неизвестную, явно выраженную с помощью еще одного уравнения через другие неизвестные, то прием блокируется — лучше (вообще говоря) сначала подставить найденное значение. Блокировка происходит также при наличии в уравнении неизвестного логарифма от суммы с дробным слагаемым. Она заставляет решатель сначала преобразовать указанный логарифм. Наконец, в случае единственной неизвестной применение приема откладывается (как и в случае систем) до уровня 3 при наличии неизвестных логарифмов по разным основаниям. Перечисленные условия относятся к сравнительно редким ситуациям, и таким образом применение рассматриваемого приема оказалось "почти всегда" оправданным.

Введенный нами прием обратился к вспомогательной задаче на сложение дробных выражений. Поэтому временно прерываем анализ цепочки преобразований основной задачи и переходим к рассмотрению выражения

$$\frac{bx}{a^2 - ab} - \frac{3bx}{2a^2}.$$

План наших действий очевиден — сначала нужно разложить на множители знаменатели, а затем выполнить сложение дробей. Оформим эти действия в виде приемов.

Разложение на множители числителей и знаменателей можно считать преобразованием общей стандартизации, предшествующим применению других приемов, относящихся к дробям. Однако, на этапе завершающего редактирования упрощаемого выражения может понадобиться обратное преобразование — иногда раскрывание скобок приводит к получению более компактной записи. Момент перехода к завершающему редактированию ответа можно помечать вводом специального комментария задачи, и тогда первый прием (разложение на множители) будет срабатывать при отсутствии данного комментария, а второй (попытка упрощающего раскрывания скобок) — при его наличии. Точкой применения приема обращения к разложению на множители можно считать сумму - основание степени, являющейся сомножителем знаменателя (соответственно, числителя) дроби, допуская вырожденный случай степени с показателем единица. В нашем примере единственной такой точкой является выражение $a^2 - ab$.

Прием, применяемый здесь для разложения на множители, состоит в вынесении за скобку общего множителя всех слагаемых. Для его программирования понадобится вспомогательная процедура, находящая наибольший общий делитель двух одночленов.

После разложения на множители знаменателя получаем выражение

$$\frac{bx}{a(a-b)} - \frac{3bx}{2a^2}.$$

Прием, выполняющий сложение дробных выражений, сначала находит общий множитель числителей и общий множитель знаменателей. Они сразу выносятся за скобки, после чего применяется обычное преобразование: числители и знаменатели перемножаются “крест накрест” и складываются. Перед тем, как составить результирующую дробь, предпринимается попытка разложить эту сумму на множители. Последнее действие может показаться излишним — ведь уже имеется прием, который пытается разложить на множители числитель. Однако, тогда понадобятся два цикла сканирования задачи вместо одного — система как бы “забудет” о том, что только что сложила дроби, и лишь после нового цикла рассмотрения задачи натолкнется на указанный числитель. Циклы сканирования задачи в решателе обычно составляют главную часть вычислительного времени. Поэтому лучше объединять в одном и том же приеме как основное действие, так и все сопровождающие его дополнительные — это дает весьма ощутимое ускорение.

В нашем случае задача решается с целью сложить дроби, и каких-либо особых эвристических решающих правил не требуется. Достаточно ввести в прием проверку наличия данной цели. Впрочем, можно ввести ограничение, требующее при сложении нескольких дробных выражений начинать с самых коротких. Иногда это упрощает выкладки.

Возвращаемся к цепочке преобразований уравнения, которое после сложения дробных выражений в левой части приобретает вид

$$\frac{bx(3b-a)}{2(a-b)a^2} = 1 - \frac{6a+7b}{6a}.$$

Это уравнение имеет в левой части дробь; для устранения ее естественно домножить обе части уравнения на знаменатель. Однако, если сформулировать прием подобным образом, то он иногда будет приводить к излишним вычислительным затратам. Целесообразно до исключения знаменателя левой части сложить дробные выражения в правой, известной части. Тогда можно будет сначала вынести за скобку общие множители числителей и знаменателей, и лишь затем избавляться от знаменателей. Результатом преобразований станет дизъюнкция, объединяющая в себе уравнение с исключенными знаменателями и частные случаи равенства нулю общих множителей числителей:

$$b = 0 \vee 3x(3b-a) = -7a(a-b).$$

Как и прием сложения дробных выражений, данный прием исключения знаменателей объединяет сразу несколько независимых преобразований, ускоряя тем самым процесс вычислений.

Следующий шаг решения задачи — разбор случаев. Прием, используемый для этого, последовательно рассматривает уравнения, соответствующие подслучаям, и затем объединяет полученные ответы связкой “или”. Ответ каждого подслучая упрощается отдельно, однако дизъюнкция ответов, вообще говоря, допускает дальнейшее упрощение — какие-то серии корней или целые промежутки могут склеиваться. Поэтому прием должен обращаться к вспомогательной задаче на упрощение полученной дизъюнкции. Более того, этот же прием должен сразу выдать ответ задачи, иначе дизъюнкция, которая им получена, снова вызовет разбор случаев, и система зациклится.

В нашем примере первый подслучай — условие $b = 0$. Оно не содержит неизвестных, и может быть сразу выдано в качестве ответа. Это действие, хотя и очень простое, тоже требует специального приема. Кроме усмотрения того, что условия задачи не содержат неизвестных, данный прием должен обратиться к вспомогательной задаче на упрощение их конъюнкции, и результат упрощения выдать в качестве ответа.

Второй подслучай — уравнение $3x(3b-a) = -7a(a-b)$. Согласно условиям на область допустимых значений (хотя мы и опустили их рассмотрение, но приведенные выше приемы должны были сопровождать все преобразования коррекцией таких условий), правая его часть отлична от нуля. Поэтому уравнение эквивалентно соотношению

$$x = -\frac{7a(a-b)}{3(3b-a)}.$$

Формулировка приема, выполняющего данный переход, очевидна.

Далее следует подстановка найденного значения неизвестной в сопровождающие условия на область допустимых значений и упрощение этих условий. Эти действия требуют специального приема, выполняющего обращение к задаче на редактирование ответа. Полученный ответ

$$a \neq 0, a-b \neq 0, 3b-a \neq 0, x = \frac{7a(b-a)}{3(3b-a)}$$

возвращается приему разбора случаев, объединяющему его с ответом $a \neq 0, b = 0$ первого подслучая и выдающему окончательный ответ.

Разобранный пример оказался совсем простым с точки зрения управления преобразованиями — каждое действие было практически однозначным. Рассмотрим несколько более сложный случай — решение системы уравнений. Будем решать систему:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x^2 + y^2 & = & z^2 \\ xy + yz + xz & = & 47 \\ (z-x)(z-y) & = & 2. \end{array} \right.$$

Поначалу каких-то соображений однозначного характера о ее преобразованиях не возникает. Однако, есть соображения о том, с чего начинать анализ ситуации. Например, можно попробовать раскрыть скобки в третьем уравнении и посмотреть, не станут ли очевидными следующие шаги. Это — тоже преобразование, однако не основной задачи на описание, а сопровождающей ее задачи на исследование, в которой накапливаются общие следствия посылок и условий. Здесь мы имеем сразу два приема: первый принимает решение о переходе к выводу следствий в задаче на исследование, второй - выводит из третьего уравнения следствие, получаемое раскрыванием скобок. Впрочем, в действительности эти приемы в решателе переставлены местами — раскрывание скобок выполняется сразу же. Случаи, когда оно может повредить, отслеживаются приемами, срабатывающими на меньших уровнях. Создавая прием для раскрывания неизвестных скобок в уравнениях, мы не должны сразу же предусматривать какие-то ограничения на его применение. Если они необходимы, то проявятся позднее, при анализе других задач. Так или иначе, получаем в списке посылок задачи на исследование первые два уравнения, сопровождаемые уравнением $xy - xz - yz + z^2 = 2$. Теперь становится видно, что при сложении второго и третьего уравнений уничтожаются сразу два неизвестных слагаемых в левой части. Получается уравнение $2xy + z^2 = 49$ — следствие двух исходных уравнений. Прием, выполняющий это действие, можно несколько обобщить — чтобы он искал линейную комбинацию двух уравнений, позволяющую устранить сразу два неизвестных слагаемых. Следующий естественный шаг — сложить первое уравнение с полученным следствием, чтобы исключить неизвестную z. Формулировка соответствующего приема несложна. После сложения уравнений имеем следствие $x^2 + y^2 + 2xy = 49$. Очередной шаг очевиден - представить левую часть как полный квадрат: $(x + y)^2 = 49$. Прием, выполняющий это действие, обращается к вспомогательной задаче на разложение левой части уравнения на множители. Если такое разложение удается, то есть вероятность, что полученное уравнение будет полезно для дальнейшего (например, чтобы поделить два уравнения, сократив неизвестный множитель). Разумеется, нужно принять меры, чтобы прием не пытался разложить на множители левую часть уравнения, полученного после раскрывания скобок, и обратно. Для этого можно использовать специальные комментарии к уравнениям, блокирующие "обратный ход". Следующий шаг — решение простейшего степенного уравнения. После него появляется дизъюнкция $x + y = 7 \vee x + y = -7$. Обычно получение дизъюнкции в задаче на исследование означает, что следует вернуться в исходную задачу на описание и предпринять разбор случаев. В нашей ситуации нужно, кроме того, учесть, что найденная дизъюнкция эквивалентна, при наличии первых двух уравнений, третьему. Это позволяет при разборе случаев исключить третье уравнение. Таким образом, цикл вывода следствий из уравнений завершился, и далее решаем две независимых системы. Ограничимся рассмотрением первой из них -

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + y & = & -7 \\ x^2 + y^2 & = & z^2 \\ xy + yz + xz & = & 47. \end{array} \right.$$

Очередной шаг состоит в преобразовании первого уравнения к виду $x = -(y + 7)$. Прием, реализующий это шаг, можно было бы представить как обращение к вспомогательной задаче, разрешающей одно из уравнений системы для исключения неизвестной. На первый взгляд, такое обобщение нашего шага может показаться естественным. Однако, при рассмотрении последующих примеров выяснилось бы, что данный прием почти всегда вреден — если произвольно выбрать какое-то уравнение системы и разрешить (пусть даже успешно) относительно одной из неизвестных, то чаще всего возникает такое усложнение системы, после которого решить ее становится весьма затруднительно. Сравнивая случаи, где выражение одной неизвестной через другие полезно, со случаями, где оно вредно, можно было бы создать несколько приемов, применяемых в очень специальных ситуациях. Для нашей задачи вводим прием, выражающий неизвестную из уравнения, если оно линейно по всем своим неизвестным.

Далее подставляем найденное выражение для x через y и переходим к решению системы относительно y, z. Это делается отдельным приемом, который должен создать вспомогательную задачу для двух неизвестных и обратиться к ее решению. Завершающая обработка ответа допускает разные варианты. Можно получить ответ на вспомогательную задачу, объединить его с уравнением $x = -(y+7)$ и упростить результат. Однако, если при решении вспомогательной задачи происходил разбор случаев и ответ на нее имеет вид дизъюнкции, то при упрощении снова понадобится разбор случаев. Поэтому в решателе реализован другой способ - уравнение $x = -(y + 7)$ передается вспомогательной задаче через ее технические структуры данных и извлекается оттуда при редактировании ответа для каждого подслучая. Тогда после решения вспомогательной задачи какой-либо дополнительной обработки ответа не потребуется.

После перехода к неизвестным y, z выполняются простые преобразования, связанные с общей стандартизацией вида уравнений и с раскрыванием скобок. Они реализуются простыми приемами, на которых можно сейчас не останавливаться. В результате возникает система $14y + 2y^2 - z^2 = -49, 7y+7z+y^2 = -47$. Легко заметить, что члены с неизвестной y в обоих уравнениях пропорциональны, и после вычитания из первого уравнения удвоенного второго остается уравнение с единственной неизвестной z. Прием, усматривающий возможность получить уравнение с единственной неизвестной за счет линейной комбинации уравнений, практически не требует каких-либо дополнительных ограничений на целесообразность срабатывания. В результате получаем систему $14y+2y^2-z^2 = -49, -14z-z^2 = 45$. Дальнейшие действия очевидны, и мы их разбирать не будем.

Разобранные примеры продемонстрировали два режима работы решателя — эквивалентные преобразования уравнения в первом случае и вывод следствий для получения дополнительной информации о неизвестных во втором. Первый режим, априори, требует большой осмотрительности при выборе каждого действия, так как неудачное преобразование может завести задачу в тупик. В действительности, однако, для многих областей наблюдается явление устойчивости: если в целом следовать некоторым несложным представлениям о том, какие преобразования упрощают задачу, то выбор конкретного порядка их выполнения несущественен — в любом случае за разумное число шагов получается один и тот же ответ. Это и позволяет в таких областях "избавляться от перебора". Второй режим позволяет исключать перебор в его классическом виде рассмотрения дерева задач, сводя поиск решения к рассмотрению расширяющегося списка посылок одной и той же задачи. Так как приемы, выводящие следствия, снабжены решающими правилами, отсекающими малоперспективные (например, чрезмерно громоздкие) с точки зрения эксперта следствия, то через определенное время наступает полное исчерпание разумных следствий, и процесс обрывается. Процедура решения задачи, вместо перебора, приобретает здесь характер "логического замыкания" исходных данных.

Рассмотрим пример, в котором возникает еще одна разновидность "логического режима". Будем решать задачу на доказательство неравенства

$$0 \leq a^4 - 2a^3b + 2a^2b^2 - 2ab^3 + b^4.$$

В таких задачах часто помогает прием, использующий неравенство для среднего арифметического и среднего геометрического. Удобнее переформулировать его в виде приема, выделяющего в оцениваемой сумме квадрат суммы или квадрат разности. В нашей задаче можно заметить, что слагаемые a^2b^2, b^4 и $-2ab^3$ представляют собой квадрат разности величин ab, b^2. Поэтому, если доказать неравенство $0 \leq a^2b^2 + a^4 - 2a^3b$, полученное отбрасыванием данных слагаемых, то задача будет решена. Применяя к последнему неравенству тот же прием, получаем искомое доказательство.

Заметим, что выбор группы слагаемых, образующих квадрат суммы или разности, выполняется неоднозначно. Например, на первом шаге можно было бы выделить группу $2a^2b^2, a^4, b^4$ и сразу завести задачу в тупик. По этой причине может показаться, что прием выделения оцениваемой группы слагаемых требует какого-то сильного управления, без чего возникнет трудоемкий перебор. Однако, данный прием обычно сильно упрощает правую часть неравенства, так что длина цепочек неравенств, возникающих при доказательстве, невелика. Кроме того, часто появляются тупиковые ситуации, в которых прием неприменим. Поэтому реальный перебор оказывается невелик, и особых проблем с принятием решения не возникает. Здесь возникает режим “ограниченного перебора”, у которого ограничения обусловлены не какими-то специальными решающими правилами, а просто тем фактом, что сложность задачи при каждом шаге сильно уменьшается. Этот режим используется в решателе для разных разделов (например, вычисление пределов и интегрирование), и обычно дает очень быстрое получение ответа.

Перейдем к примерам из других разделов. Рассмотрим сначала простую геометрическую задачу на вычисление. В параллелограмме $ABCD$ из точки N пересечения диагоналей проведены перпендикуляры NF, NE к сторонам AB,AD. Длины этих перпендикуляров равны, соответственно, p, m. Угол BAD равен a. Найти длины x, y диагоналей AC, BD и площадь параллелограмма z.

Схема решения геометрических задач на вычисление напоминает схему решения систем уравнений — происходит вывод следствий из посылок и условий до тех пор, пока не возникают либо равенства для значений неизвестных, либо уравнения, из которых значения неизвестных извлекаются чисто алгебраическими методами. В начале процесса вывода порождаются совсем простые утверждения, которые можно рассматривать как логическое представление чертежа задачи. В нашем примере таковыми являются утверждения о параллельности прямых AB, CD и AD, BC. При решении геометрической задачи последовательность рассуждений допускает множество вариаций. Итоговая картина при этом обычно оказывается не очень чувствительной к ее конкретной версии. Приведем для нашего примера одну из таких возможных последовательностей.

Прежде всего, замечаем, что в задаче нужно найти площадь параллелограмма и что к стороне AD проведен перпендикуляр NE. Для получения высоты, длина которой участвует в формуле площади, продолжаем перпендикуляр до пересечения с противоположной стороной в точке G, и одновременно выписываем соотношение $z = l(AD)l(EG)$. Эти действия оформляем в виде отдельного приема. Основаниями для его применения служат указанные выше признаки - упоминание в задаче о площади параллелограмма и “недоведенный” до конца перпендикуляр к одной из сторон.

Продолжая общий анализ чертежа, выводим из равенства $\angle(BAD) = a$ соотношения для четырех остальных углов параллелограмма. Основанием для применения этого приема является упоминание в задаче хотя бы одного из углов параллелограмма.

Аналогичным образом, выводим равенство длин противоположных сторон параллелограмма $l(BC)$ и $l(AD)$. Основанием применения приема служит упоминание в задаче одной из этих длин.

Так как выделена точка N пересечения диагоналей параллелограмма, замечаем, что диагонали делятся в ней пополам: $l(CN) = l(AN)$, $l(DN) = l(BN)$. Еще один прием отмечает, что точка E не просто лежит на прямой BD, но является точкой отрезка BD. Основанием для его срабатывания служит наличие в посылках задачи равенства $l(DN) = l(BN)$. Этот же прием устанавливает, что точка N лежит на отрезке AC.

Так как точка N находится на отрезке AC, причем длина отрезка и расстояния от N до его концов упоминаются в задаче, то выводим соотношение равенства длины отрезка сумме длин подотрезков: $x = 2l(AN)$. Аналогично, выводим $2l(BN) = y$.

Далее выводится условие принадлежности точки N отрезку EG — проведенной высоте параллелограмма. Основаниями являются принадлежность точки N диагонали и параллельность сторон. Отсюда, аналогично предыдущему, получается следствие $l(EG) = 2m$ - прием о равенстве длины отрезка сумме длин подотрезков срабатывает уже в третий раз.

Так как угол BAD и высота $l(EG)$ теперь известны, можно выписать тригонометрическое соотношение $\sin(a)l(AB) = 2m$, в котором единственный неизвестный числовой параметр - длина отрезка AB. Выписывание таких соотношений (возможно, не на самых малых уровнях сканирования задачи) представляется разумным, так как постепенно доопределяются новые параметры чертежа.

После того, как предыдущее соотношение занесено в посылки задачи, оно преобразуется к виду $l(AB) = 2m/\sin(a)$. Здесь работает прием, разрешающий линейное соотношение относительно числового параметра, определенного через ссылки на точки.

Как только оказалась введена в рассмотрение длина стороны AB, срабатывает уже упоминавшийся выше прием, выписывающий равенство длин сторон AB,CD.

Далее вводится высота параллелограмма CH, проведенная к продолжению стороны AB. Основанием для этого действия служит то, что, во-первых, длины отрезков AN,NC пропорциональны, а длина p высоты FN — известна. Отсюда прием выводит следствие $l(CH) = 2p$. Во-вторых, основанием для срабатывания является наличие известного угла CBA, который мог бы позволить выразить впоследствии через $l(CH)$ какие-то новые параметры чертежа.

Условие перпендикулярности прямых CH и AB преобразуется в условие параллельности прямых CH и FN - чтобы в дальнейшем иметь дело с классами параллельных прямых, выбирая в каждом таком классе единственного представителя.

Снова применяется прием, выписывающий тригонометрическое соотношение

$$\sin(a)l(AD) = 2p.$$

Однако, это другой прием, срабатывающий на меньшем уровне, чем рассмотренный выше. Оснований для его срабатывания больше — параметр $l(AD)$ к этому моменту уже встречается в задаче. Введенное соотношение сразу преобразуется к виду $l(AD) = 2p/\sin(a)$.

Теперь начинает срабатывать прием, подставляющий найденное значение $l(AD)$ во все посылки, где этот параметр встречается. В частности, таким образом из посылки $z = 2ml(AD)$ получаем фрагмент ответа $z = 4mp/\sin(a)$. Накопление информации о параметрах чертежа "само собой" привело к нахождению искомой площади. Разумеется, существенную роль при этом сыграли приоритеты на получение соотношений, устанавливающих связь данных и искомых параметров. Вывод следствий имеет характер "встречного распространения" цепочек зависимостей — от известных и от неизвестных величин.

К текущему моменту определились длины сторон параллелограмма и его углы. Поэтому для нахождения неизвестных диагоналей и завершения решения остается воспользоваться теоремой косинусов. Основания для срабатывания приема — известны длины двух сторон треугольника и угол между ними, а длина третьей стороны связана с неизвестными задачи каким-либо соотношением.

Перечисленные выше действия в действительности совпадают с действиями решателя. Таким образом, видно, что даже после накопления большой базы приемов удается избежать чрезмерного количества выводимых следствий. Это достигается тенденцией вводить при обучении как можно более сильные ограничения на срабатывания, пропускающие лишь действительно разумные шаги.

Сразу заметим, что при обучении решателя геометрическим задачам было допущено одно отклонение от "человеческих" стандартов. Вместо того, чтобы в цикле предварительного анализа чертежа определять, какие его элементы можно выразить через другие, и лишь затем выписывать нужные соотношения, решатель вводит эти соотношения сразу. Однако, за исключением редких случаев, он никак их не преобразует, а использует лишь для установления самого факта взаимной выразимости параметров - как своего рода "граф" взаимосвязей. На быстродействии компьютерной системы это сказывается мало, но у пользователя, анализирующего ход решения по шагам, складывается впечатление об избыточной громоздкости накапливаемой информации. Впрочем, за счет дальнейшего усиления решающих правил, с данным явлением можно достаточно эффективно бороться. Иногда оно и вовсе незаметно.

Следующая задача — на качественное исследование поведения функции $f(x) = x^x$ с помощью пределов и производных. Она решается по схеме, аналогичной только что разобранному геометрическому примеру. Решение заключается в последовательном выводе следствий, характеризующих функцию f, и в отборе тех из них, которые целесообразно включить в итоговый список. Прежде всего применяется прием, находящий область определения функции. Он выписывает условия на область допустимых значений x и обращается к вспомогательной задаче на упрощение класса таких значений. Выводится следствие $\mathrm{Dom}(f) = (0, \infty)$. Следующий шаг — вычисление производной. Получаются следствия $g(x) = (1 + \ln x)x^x$; "Производная(f, g)". Снова применяется прием, определяющий область определения введенной в рассмотрение функции g. После того, как явно указаны области определения f, g, вводится посылка, указывающая множество точек, где производная не определена либо не вычислена: $\mathrm{Dom}(f) \setminus \mathrm{Dom}(g) = \emptyset$. Следующий шаг - срабатывание приема, обращающегося к вспомогательной задаче для отыскания корней производной и вводящего следствие $\mathrm{roots}(g, \mathrm{Dom}(g)) = \{1/e\}$. Чтобы анализировать поведение функции в точках, где ее производная определена и отлична от нуля, эта область явно находится и разбивается на промежутки. Соответствующий прием обращается к вспомогательной задаче, осуществляющей такое разбиение, после чего появляется посылка "областьроста$(f, (0, 1/e) \cup (1/e, \infty))$", распадающаяся на утверждения "областьроста$(f, (0, 1/e))$", "областьроста$(f, (1/e, \infty))$". Используя информацию о промежутках монотонности и анализируя знак производной на их стыке (точка $1/e$), следующий прием выводит утверждения "возрастает$(f, (1/e, \infty))$", "убывает$(f, (0, 1/e))$". Далее применяется прием, анализирующий знаки функции f на интервале монотонности. Он выводит следствия о числе корней на интервале: $\mathrm{card}(\mathrm{roots}(f, (0, 1/e))) = 0$, $\mathrm{card}(\mathrm{roots}(f, (1/e, \infty))) = 0$, немедленно преобразуемые к виду $\mathrm{roots}(f, (0, 1/e)) = \emptyset$, $\mathrm{roots}(f, (1/e, \infty)) = \emptyset$. Следующий прием усматривает экстремум на стыке промежутков монотонности -

$$\mathrm{Extr}(f, \frac{1}{e}, \frac{1}{\exp\frac{1}{e}}, \min).$$

На этом поток вывода следствий исчерпывается, и выдается ответ, в который отбираются: соотношение, определяющее функцию f, информация об экстремуме, о промежутках монотонности, об области определения функции f и о числе ее корней на промежутках монотонности.

В этом примере управляющая компонента приемов была почти вырожденной — по существу, совокупность приемов составляла алгоритм исследования функции. Однако, разбиение такого алгоритма на отдельные почти не связанные друг с другом фрагменты — приемы - предоставляет несомненные удобства для последующего пополнения его все новыми и новыми элементами, ориентированными на различные специальные случаи.

Еще один пример, решаемый по схеме вывода следствий — из аналитической геометрии. Пусть стороны треугольника заданы уравнениями $7x + y - 2 = 0, 5x + 5y - 4 = 0, 2x - 2y + 5 = 0$. Нужно найти координаты точки внутри треугольника, равноудаленной от первых двух прямых и отстоящей от третьей на расстояние $\frac{3\sqrt{2}}{4}$. В аналитической геометрии, а в особенности в таких разделах, как теория вероятностей и физика, обычной математической символики для полной формулировки задачи оказывается уже недостаточно. Поэтому пошаговому анализу решения здесь предшествует анализ возможных вариантов логической формализации условия и отбор наиболее удобных вариантов. В нашем примере обозначения возьмем из логического языка решателя. Пусть вершины треугольника обозначены A, B, C, а прямоугольная система координат, относительно которой берутся уравнения — K. Сами уравнения можно записать тогда, например, в следующем виде: "коорд(прямая(AB),K) $=$ set$_{xy}$(x – число & y – число & $7x + y - 2 = 0$)"; "коорд(прямая(AC),K) $=$ set$_{xy}$(x – число & y – число & $5x + 5 - 4 = 0$)"; "коорд(прямая(BC),K) $=$ set$_{xy}$(x – число & y – число & $2x - 2y + 5 = 0$)". Искомую точку обозначим D; условие ее принадлежности треугольнику запишем в виде $D \in$ фигура(ABC). Равноудаленность точки от первых двух прямых представляем записью "расстдопрямой(D,прямая(AB))$=$ расстдопрямой(D,прямая(AC))". Указываем расстояние до третьей прямой: "расстдопрямой(D,прямая(BC)) $= \frac{3\sqrt{2}}{4}$". Перечисленные утверждения образуют список посылок задачи, т.е. то, что дано. Условием ее служит равенство $z =$ коорд(D, K), причем переменная z является неизвестной задачи. По постановке задачи, в выражение для z не должны входить обозначения A, B, C, D, K, хотя они и появляются в посылках задачи, а следовательно, формально являются "известными". Это специально оговаривается в целевой установке задачи.

Процесс решения задачи выглядит как вывод следствий из объединенного списка посылок и условий. Приведем цепочку выводов, реализуемую решателем. Хотя она, быть может, и не оптимальна, однако для новичка вполне допустима.

Прежде всего, вводятся координаты точек A, B, C: "коорд(A,K)" $= (a, b)$; "коорд(B,
K)" $= (c, d)$; "коорд(C,K)" $= (e, f)$. Основанием для такого действия служит то, что точки встречаются в обозначениях прямых, для которых известны уравнения. Следующий шаг — ввод координатного набора для неизвестной z: $z = (g, h)$. Основанием является то, что в задаче рассматривается расстояние от точки D до прямой, уравнение которой известно. Для всех введенных новых параметров $a, b, \ldots, h$ регистрируются посылки, указывающие, что параметры — числовые. Подставляя координаты точки A в уравнение прямой AB, получаем соотношение $b+7a-2 = 0$. Его преобразуем к виду $b = 2 - 7a$ и подставляем b во все остальные посылки задачи. Аналогичным образом, выводим соотношение $d + 7c - 2 = 0$ и преобразуем к виду $d = 2 - 7c$. Подставляя координаты точки A в уравнение прямой AC, находим $a = 1/5$. Все эти действия выполняются простыми приемами, срабатывающими без ограничений. Подставляя значение a в уравнение для b, находим $b = 3/5$. Для точек B, C выполняем аналогичные действия; в итоге получаем $c = -1/16$, $d = 2 + 7/16$, $e = -17/20$, $f = 33/20$.

Определив координаты точек A, B, C (быть может, они для дальнейшего и не понадобятся), решатель переходит к выводу соотношений для искомых координат g, h. Так как уравнение прямой AC известно, можно воспользоваться формулой для расстояния от точки до прямой и получить соотношение

$$50(\text{расстдопрямой}(D, \text{прямая}(AC)))^2 = 50gh+25g^2+25h^2-40g-40h+16.$$

Основанием для этого действия служит то, что указанное расстояние уже упоминается в задаче, а уравнение прямой известно. Выражаем квадрат расстояния:

$$(\text{расстдопрямой}(D, \text{прямая}(AC)))^2 = \frac{50gh + 25g^2 + 25h^2 - 40g - 40h + 16}{50}.$$

Аналогичным образом, для расстояния от D до прямой AB получаем:

$$(\text{расстдопрямой}(D, \text{прямая}(AB)))^2 = \frac{14gh + 49g^2 + h^2 - 28g - 4h + 4}{50}.$$

С учетом посылки задачи, указывающей равенство данных расстояний, выводим соотношение

$$\frac{50gh + 25g^2 + 25h^2 - 40g - 40h + 16}{50} = \frac{14gh + 49g^2 + h^2 - 28g - 4h + 4}{50}.$$

Далее переходим к расстоянию от D до прямой BC:

$$(\text{расстдопрямой}(D, \text{прямая}(BC)))^2 = \frac{-8gh + 4g^2 + 4h^2 + 20g - 20h + 25}{8}.$$

В это равенство подставляем значение расстояния, данное в формулировке задачи:
$$\frac{9}{8} = \frac{-8gh + 4g^2 + 4h^2 + 20g - 20h + 25}{8}.$$
Начинается цепочка общей стандартизации последних уравнений. После устранения знаменателей и сокращения они преобразуются к виду: $5g - 2gh - 5h + g^2 + h^2 = -4$, $g + 3h + 2g^2 - 3gh - 2h^2 = 1$.

Теперь начинается учет условия принадлежности точки D треугольнику. Здесь-то и используются найденные ранее координаты вершин. Условие расположения точки D по ту же сторону от прямой AB, что и точка C, дает неравенство $h + 7g - 2 \leq 0$. В случае прямой AC получаем $0 \leq 5g + 5h - 4$. В случае прямой BC - $0 \leq 2g - 2h + 5$.

Далее решатель усматривает систему из двух приведенных выше уравнений относительно числовых параметров g, h и решает ее вне общего контекста, учитывая также неравенства для g, h. В результате получается $g = 0, h = 1$, $z = (0, 1)$, и задача решена.

Процесс вывода следствий похож на решение задачи по элементарной геометрии, однако управление приемами здесь существенно проще.

Список литературы

[1] Подколзин А. С., “Введение в логические процессы. Представление задач в решателе”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **29**:2 (2025), 5–138.

[2] Подколзин А. С., *Компьютерное моделирование логических процессов. Том 1. Архитектура и языки решателя задач.*, Физматлит, Москва, 2008, 1024 с.

[3] Подколзин А. С., *Компьютерное моделирование логических процессов. Том 2. Опыт обучения компьютерного решателя задач: логические приемы, алгебра множеств, комбинаторика и элементарная алгебра.*, ВИНИТИ РАН, Москва, 2015, 1153 с.

[4] Подколзин А. С., *Компьютерное моделирование логических процессов. Том 3. Опыт обучения компьютерного решателя задач: математический анализ, дифференциальные уравнения и элементарная геометрия.*, ВИНИТИ РАН, Москва, 2015, 1320 с.

[5] Подколзин А. С., *Компьютерное моделирование логических процессов. Том 4. Опыт обучения компьютерного решателя задач: аналитическая геометрия, линейная алгебра, теория вероятностей, комплексный анализ и другие разделы.*, ВИНИТИ РАН, Москва, 2017, 969 с.

[6] Подколзин А. С., *Компьютерное моделирование логических процессов. Том 5. Опыт обучения компьютерного решателя задач: элементарные физика и химия, шахматы.*, ВИНИТИ РАН, Москва, 2019, 938 с.

[7] Подколзин А. С., *Компьютерное моделирование логических процессов. Том 6. Опыт обучения компьютерного решателя задач: понимание естественного языка и анализ рисунков.*, ВИНИТИ РАН, Москва, 2019, 757 с.

[8] Подколзин А. С., *Компьютерное моделирование логических процессов. Том 7. Автоматическое создание приемов логической системы: классификация приемов решателя, логический ассемблер, компилятор спецификаций, создание тестовых приемов и доводка приемов.*, ВИНИТИ РАН, Москва, 2021, 739 с.

[9] Подколзин А. С., *Компьютерное моделирование логических процессов. Том 8. Автоматическое создание приемов логической системы: база теорем, характеризация теорем, создание спецификаций приемов.*, ВИНИТИ РАН, Москва, 2021, 515 с.

[10] Подколзин А. С., *Компьютерное моделирование логических процессов. Том 9. Автоматическое создание приемов логической системы: логический вывод в базе теорем.*, ВИНИТИ РАН, Москва, 2022, 1494 с.

Introduction to Logical Processes. General diagram of the Solver's functioning

Podkolzin A.S.

This article describes the general layout of the mathematical problem solver. It explains how the verification process works, how to run problem solvers, and how to explore step-by-step previews. A large number of suggestions for entering and solving problems are provided.

Keywords: mathematical problem solver, logical processes, logical language, logical formalization of problems.

References

[1] Podkolzin A. S., "Introduction to Logical Processes. Representation of Problems in the Solver", *Intelligent Systems. Theory and Applications*, **29**:2 (2025), 5–138 (In Russian)

[2] Podkolzin A. S., *Computer modeling of logical processes. Volume 1. Architecture and languages of the problem solver.*, Fizmatlit, Moscow, 2008, 1024 pp.

[3] Podkolzin A. S., *Computer modeling of logical processes. Volume 2. Experience in training a computer problem solver: logical techniques, set algebra, combinatorics and elementary algebra.*, VINITI RAS, Moscow, 2015, 1153 pp.

[4] Podkolzin A. S., *Computer modeling of logical processes. Volume 3. Experience in teaching computer problem solver: mathematical analysis, differential equations and elementary geometry.*, VINITI RAS, Moscow, 2015, 1320 pp.

[5] Podkolzin A. S., *Computer modeling of logical processes. Volume 4. Experience in teaching computer problem solver: analytical geometry, linear algebra, probability theory, complex analysis and other topics.*, VINITI RAS, Moscow, 2017, 969 pp.

[6] Podkolzin A. S., *Computer modeling of logical processes. Volume 5. Experience in teaching a computer problem solver: elementary physics and chemistry, chess.*, VINITI RAS, Moscow, 2019, 938 pp.

[7] Podkolzin A. S., *Computer modeling of logical processes. Volume 6. Experience in training a computer problem solver: natural language understanding and image analysis.*, VINITI RAS, Moscow, 2019, 757 pp.

[8] Podkolzin A. S., *Computer modeling of logical processes. Volume 7. Automatic creation of logic system techniques: classification of solver techniques, logic assembler, specification compiler, creation of test techniques and refinement of techniques.*, VINITI RAS, Moscow, 2021, 739 pp.

[9] Podkolzin A. S., *Computer modeling of logical processes. Volume 8. Automatic creation of logical system techniques: theorem base, characterization of theorems, creation of technique specifications.*, VINITI RAS, Moscow, 2021, 515 pp.

[10] Podkolzin A. S., *Computer modeling of logical processes. Volume 9. Automatic creation of logical system techniques: logical inference in the theorem base.*, VINITI RAS, Moscow, 2022, 1494 pp.